Geometria descrittiva dinamica

Indagine insiemistica sulla doppia proiezione ortogonale di Monge

Con questo learning object si indaga e approfondisce la relazione geometrico-descrittiva della legge di perpendicolarità o ortogonalità tra gli elementi geometrici uguali, cioè la legge di

PERPENDICOLARITA' TRA PIANI

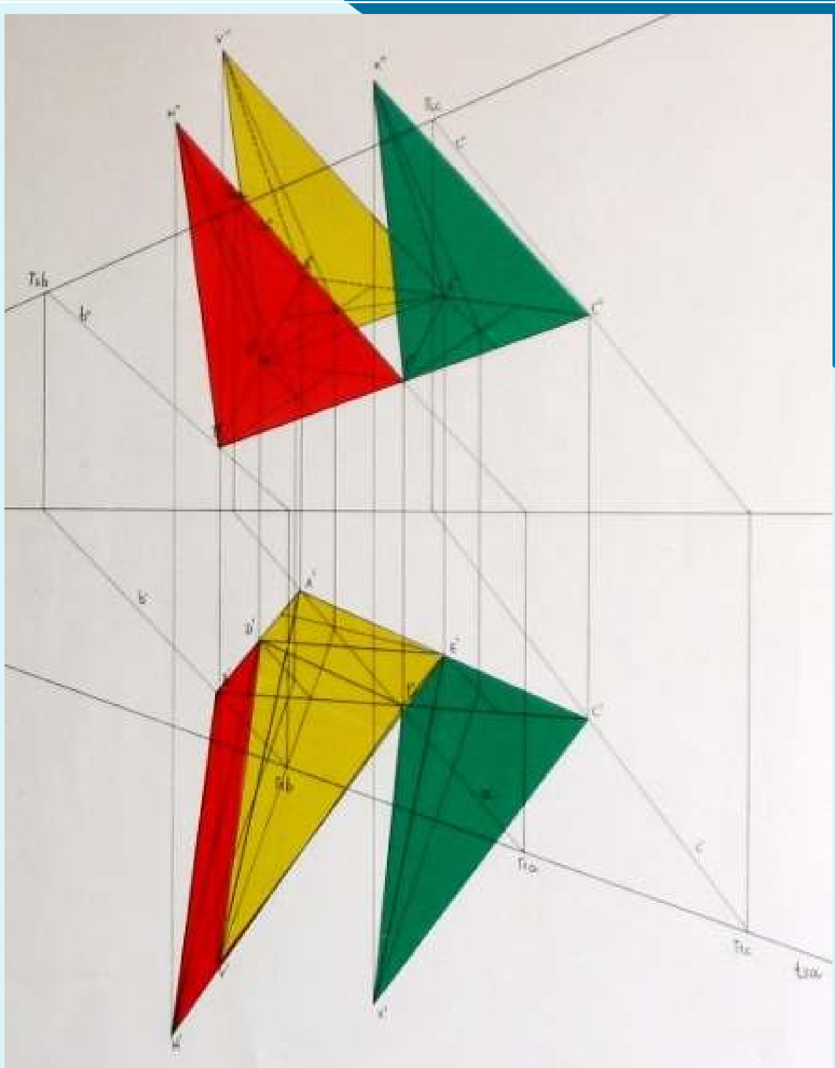
Con questa ricerca si studiano e definiscono i rapporti ed i legami geometrico-descrittivi (esistenti o non) con riferimento all'aspetto insiemistico tra due enti uguali della geometria : **IL PIANO**

Il metodo descrittivo di riferimento è costituito dalla doppia proiezione ortogonale di Monge

La conoscenza di questa legge ci permette di definire la presenza o meno di rapporti di perpendicolarità tra gli enti geometrici di un solido, di un oggetto, di un progetto inteso come attualizzazione del futuro, prima che esso si concretizzi. Pertanto è una legge geometrica di primaria importanza per tutti quelli che operano in senso progettuale e manipolano mentalmente gli enti geometrici che articolandosi nello spazio danno vita a forme finalizzate a definire e modellare lo spazio .

Geometria descrittiva dinamica

Indagine insiemistica sulla doppia proiezione ortogonale di Monge



LE LEGGI GEOMETRICHE

PERPENDICOLARITA' O ORTOGONALITA' TRA PIANI

Il disegno è stato eseguito nell'a. s. 2001/2002

da **Giuseppe Manetta** della classe 1°B dello **Istituto Statale d'Arte "Mario dei Fiori " di Penne**

per la materia :"**Disegno geometrico**"

Insegnante: Prof. Elio Fragassi

La revisione delle formalizzazioni è stata curata dalla dott.ssa **Gabriella Mostacci**

Autore Prof. Elio Fragassi

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO

INDAGINE ESPLICATIVA E DEDUTTIVA

CONSIDERAZIONI E NOTE INTRODUTTIVE (1)

Il piano si rappresenta (vedasi tabella generale), descrittivamente, mediante due tracce t_1 e t_2 che, geometricamente, si caratterizzano come due rette in quanto costituiscono l'intersezione tra il piano, oggetto della rappresentazione, e i semipiani del diedro, luogo della rappresentazione.

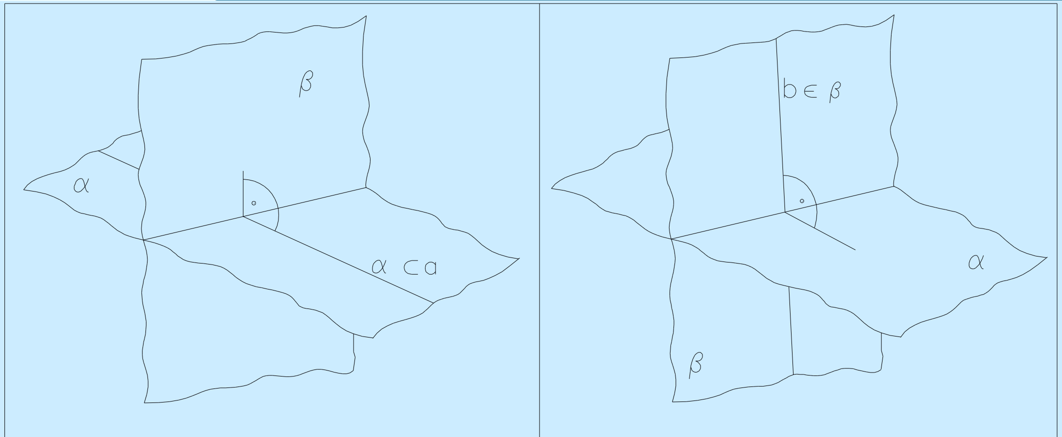
Le tracce non sono, però, sufficienti a definire, dal punto di vista descrittivo, il rapporto geometrico dell'ortogonalità tra due piani perché esse non descrivono lo sviluppo della superficie del piano nello spazio del diedro ma solo le intersezioni di questo con i piani di proiezione π_1 e π_2; salvo casi riferiti a posizioni particolari in cui la traccia del piano rappresenta lo scorcio totale del piano stesso (piano orizzontale, piano di profilo, ecc.).

A tal proposito è bene ricordare, inoltre, che le tracce del piano possono essere riguardate come rette costituite dalla sommatoria delle tracce della rigata del piano e quindi in forma descrittiva si avrà:

$$\alpha = \begin{cases} \mathbf{t}_{1\alpha} = \overrightarrow{\sum_{-\infty}^{+\infty}} \left\{ \overline{\overline{\mathbf{T}_{1r}}} \right\} \\ \mathbf{t}_{2\alpha} = \overrightarrow{\sum_{-\infty}^{+\infty}} \left\{ \overline{\overline{\mathbf{T}_{2r}}} \right\} \end{cases}$$

dove r è la retta che spostandosi parallelamente a se stessa, secondo una direzione assegnata, determina la superficie rigata detta superficie piana o semplicemente piano.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO – PIANO
CONSIDERAZIONI E NOTE INTRODUTTIVE (2)



a	Mediante la contenenza $(\alpha \subset a) \perp \beta$	b	Mediante l'appartenenza $\alpha \perp (b \in \beta)$
Fig.21	Ortogonalità tra piani		

Per quanto detto, prendendo come riferimento il piano rigato, il rapporto di ortogonalità tra due piani α e β si può ridurre ad una ortogonalità tra due rette, di cui, una, (generatrice del piano α) appartenente al piano α e l'altra (generatrice del piano β) appartenente al piano β (Fig. 21).

Poiché l'ortogonalità tra due rette ci riconduce all'ortogonalità tra un piano ed una retta, possiamo definire la condizione descrittiva della ortogonalità tra piani come di seguito.

Due piani sono in rapporto geometrico di perpendicolarità (o ortogonalità) se uno di essi contiene una retta perpendicolare all'altro

o, reciprocamente

Due piani sono in rapporto geometrico di perpendicolarità (o ortogonalità) se uno di essi è perpendicolare ad una retta appartenente all'altro.

Assunto quanto di sopra come unica possibilità descrittiva per la determinazione delle leggi di ortogonalità tra piani, si torna a considerare i due elementi geometrici "**piano**" e "**retta**", con le relative condizioni di ortogonalità già definite, integrate dalle leggi dell'inclusione o della contenenza (fig. 21-a) e dalle biunivoche condizioni di appartenenza (Fig. 21-b).
Dati i due assunti generali, poiché le condizioni geometriche possono essere sia verificate (aspetto esplicativo) che imposte (aspetto applicativo), cominciamo con analizzare l'ipotesi della verifica.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
IMPOSTAZIONE DELLE PROCEDURE DI VERIFICA (1)

Questo doppio legame (Fig.21/a della pagina precedente) può essere espresso, in forma sintetica, con l'uso della specifica simbologia insiemistica, come di seguito:

$\alpha \subset a \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$ che si legge:

se il piano α contiene una retta a perpendicolare ad un altro piano β significa che i due piani sono, tra loro, in rapporto geometrico di ortogonalità.

Oppure tramite le reciproche condizioni di appartenenza (Fig.21/b della pagina precedente) dalla seguente espressione:

$\alpha \perp b \in \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$ che si legge:

se il piano α è perpendicolare ad una retta b appartenente ad un piano β significa che i due piani sono, tra loro, in rapporto geometrico di ortogonalità

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
IMPOSTAZIONE DELLE PROCEDURE DI VERIFICA (2)

Le due condizioni possono essere esplicitate, informa sintetica, con l'uso delle formalizzazioni insiemistico - descrittive, come di seguito.

$t_{1\alpha} \subset T_{1a}$, $t_{2\alpha} \subset T_{2a}$ $\Rightarrow$ $\alpha \subset a$

$a' \perp t_{1\beta}$, $a'' \perp t_{2\beta}$ $\Rightarrow$ $a \perp \beta$

$\alpha \subset a$, $a \perp \beta$ $\Rightarrow$ $\alpha \subset a \perp \beta$ $\Rightarrow$ $\alpha \perp \beta$

Oppure tramite le condizioni di appartenenza secondo la seguente formalizzazione

$t_{1\alpha} \perp b'$, $t_{2\alpha} \perp b''$ $\Rightarrow$ $\alpha \perp b$

$T_{1b} \in t_{1\beta}$, $T_{2b} \perp t_{2\beta}$ $\Rightarrow$ $b \in \beta$

$\alpha \perp b$, $b \in \beta$ $\Rightarrow$ $\alpha \perp b \in \beta$ $\Rightarrow$ $\alpha \perp \beta$

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
IMPOSTAZIONE DELLE PROCEDURE DI VERIFICA (3)

Data la biunivocità del legame descrittivo si ha che

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \beta \perp \alpha$$

Per cui scambiando l'ordine dei piani si possono espletare le operazioni di verifica anche secondo le formalizzazioni riportate di seguito.

Il doppio legame (Fig.21/b) può essere espresso, in forma sintetica, con l'uso della specifica simbologia insiemistica, come di seguito:

$\beta \subset b \perp \alpha \Rightarrow \beta \perp \alpha$ che si legge

Se il piano β contiene una retta b perpendicolare al piano α, significa che i due piani sono, tra loro, in rapporto geometrico di ortogonalità

Oppure, tramite le reciproche condizioni di appartenenza (Fig. 21/a), dalla formalizzazione insiemistica seguente

$\beta \perp a \in \alpha \Rightarrow \beta \perp \alpha$ che si legge

Se il piano β si presenta perpendicolare ad una retta a che appartiene ad un piano α, significa che i due piani sono in rapporto geometrico di ortogonalità

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
IMPOSTAZIONE DELLE PROCEDURE DI VERIFICA (4)

Esplicitando, le due condizioni possono essere sintetizzate, con l'uso delle formalizzazioni insiemistico - descrittive come di seguito

$t_{1\beta} \subset T_{1b}$

$t_{2\beta} \subset T_{2b}$

$\beta \subset b$

$b' \perp t_{1\alpha}$

$b'' \perp t_{2\alpha}$

$b \perp \alpha$

$\beta \subset b \perp \alpha$ → $\beta \perp \alpha$

Oppure tramite le condizioni di appartenenza secondo la seguente formalizzazione

$t_{1\beta} \perp a'$

$t_{2\beta} \perp a''$

$\beta \perp a$

$T_{1a} \in t_{1\alpha}$

$T_{2a} \in t_{2\alpha}$

$a \in \alpha$

$\beta \perp a \in \beta$ → $\beta \perp \alpha$

Da quanto sopra possiamo dedurre la condizione geometrica generale che può essere così enunciata

Due piani sono in rapporto geometrico di ortogonalità se, e solo se, per uno di essi è possibile condurre una retta perpendicolare all'altro

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
INDAGINE ESPLICATIVA (1)

Stante la definizione appena data e ricordando che le condizioni geometriche possono essere utilizzate sia nei processi di verifica e ricerca dell'eventuale specifico rapporto geometrico - descrittivo, che nei processi di imposizione durante l'elaborazione di una rappresentazione grafica come legame concreto, definito, continuo e costante tra due o più elementi geometrici, si esplicitano, di seguito, i passaggi di alcuni processi di verifica.

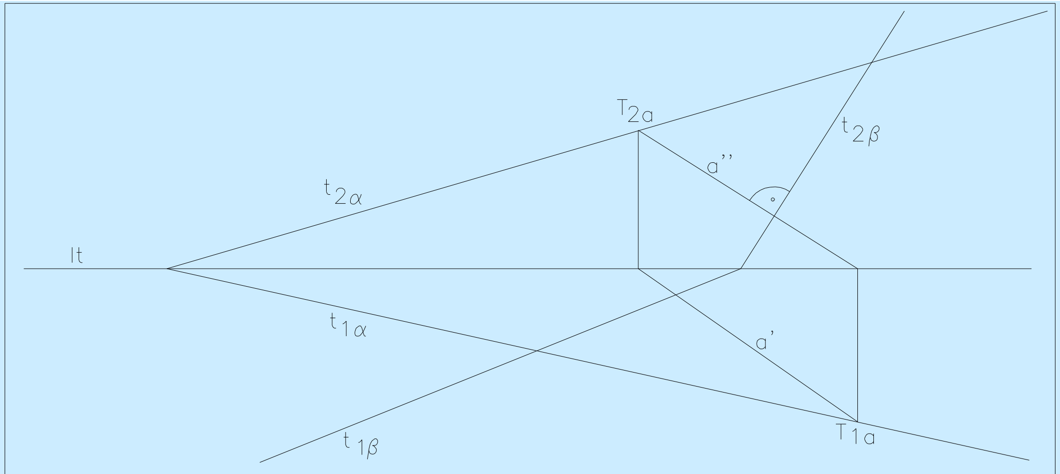


Fig.22 Ortogonalità tra piani (verifica)

Dati i piani come in figura 22,
$\alpha\ (t_{1\alpha}, t_{2\alpha})$ e
$\beta\ (t_{1\beta}, t_{2\beta})$

si conduce per α la retta $a \in \alpha$ che abbia la proiezione a'' ortogonale alla traccia

$t_{2\beta} : (a'' \perp t_{2\beta})$

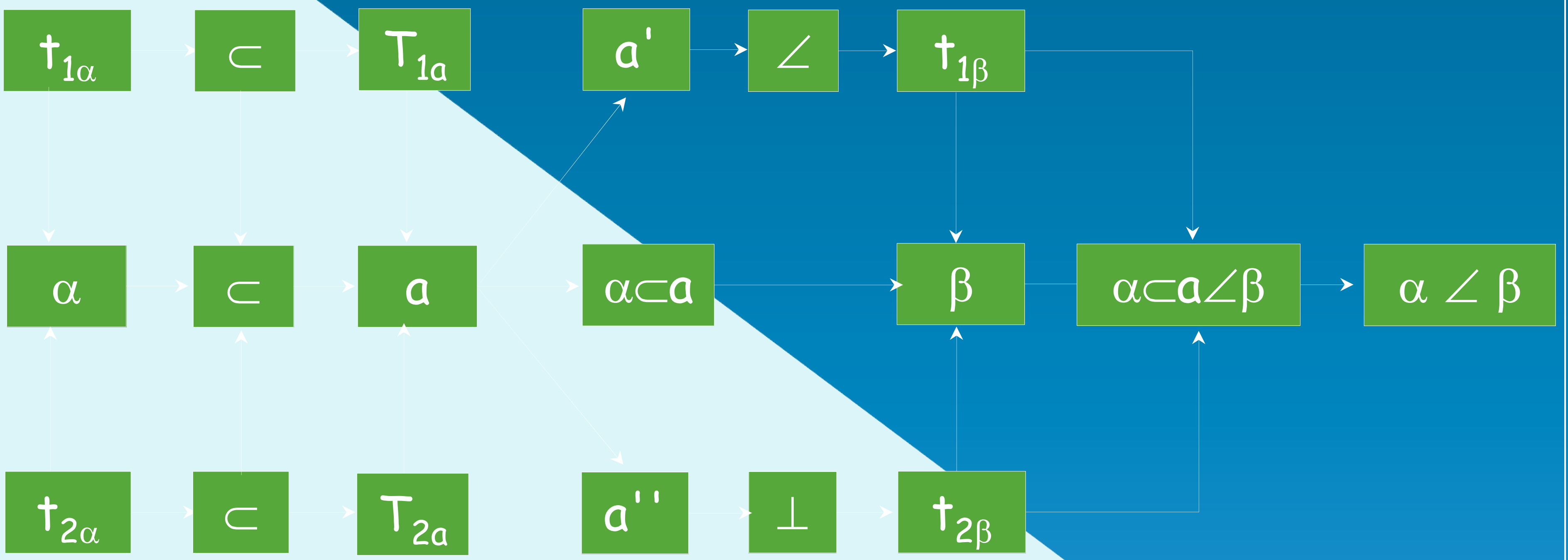
Se, nella caratterizzazione grafica di $a \in \alpha$ si verifica che anche $a' \perp t_{1\beta}$ possiamo dire che $\alpha \perp \beta$, altrimenti si ha $\alpha \angle \beta$ in quanto non verifica la legge esposta nella diapositiva n° 6 né la sua esplicitazione successiva.

Nel caso graficizzato sopra, (Fig.22) si verifica, infatti, che $a' \angle t_{1\beta}$, quindi, più in generale, si conclude che $\alpha \angle \beta$.

$\alpha \angle \beta$

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
INDAGINE ESPLICATIVA (2)

I passaggi, per il controllo e la verifica della legge descrittiva, possono essere espressi in modo sintetico mediante la seguente simbologia



Nell'analisi dei passaggi dell'algoritmo grafico è solo il caso di ricordare che mentre il concetto di obliquità comprende il rapporto di ortogonalità, ciò non vale per il reciproco; cioè il concetto di ortogonalità non comprende il rapporto di obliquità per cui, nel caso in esame, prevale il rapporto di obliquità sul rapporto di ortogonalità. Il rapporto di obliquità è un rapporto concreto, dinamico e variabile mentre quello di ortogonalità è un rapporto concreto, statico e definito, come già esposto nell'analisi per le determinazioni dei concetti generali .

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
INDAGINE ESPLICATIVA (3)

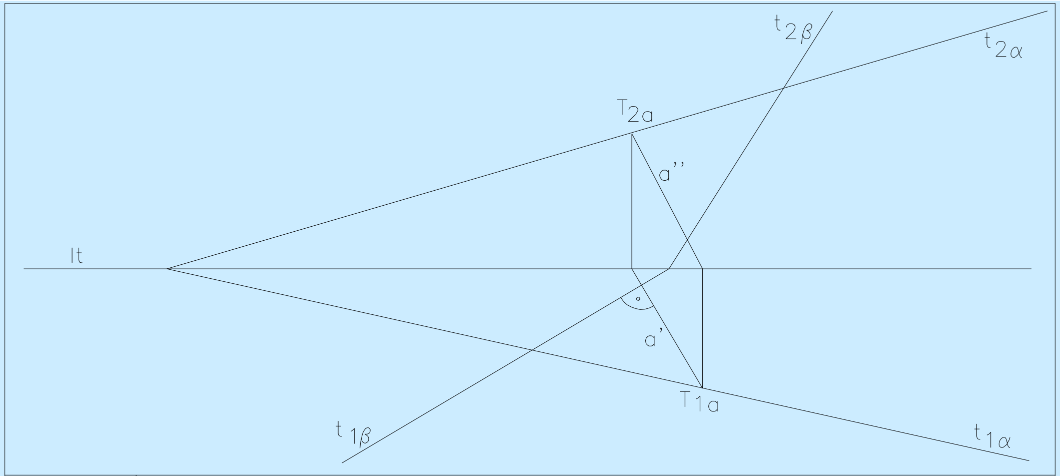
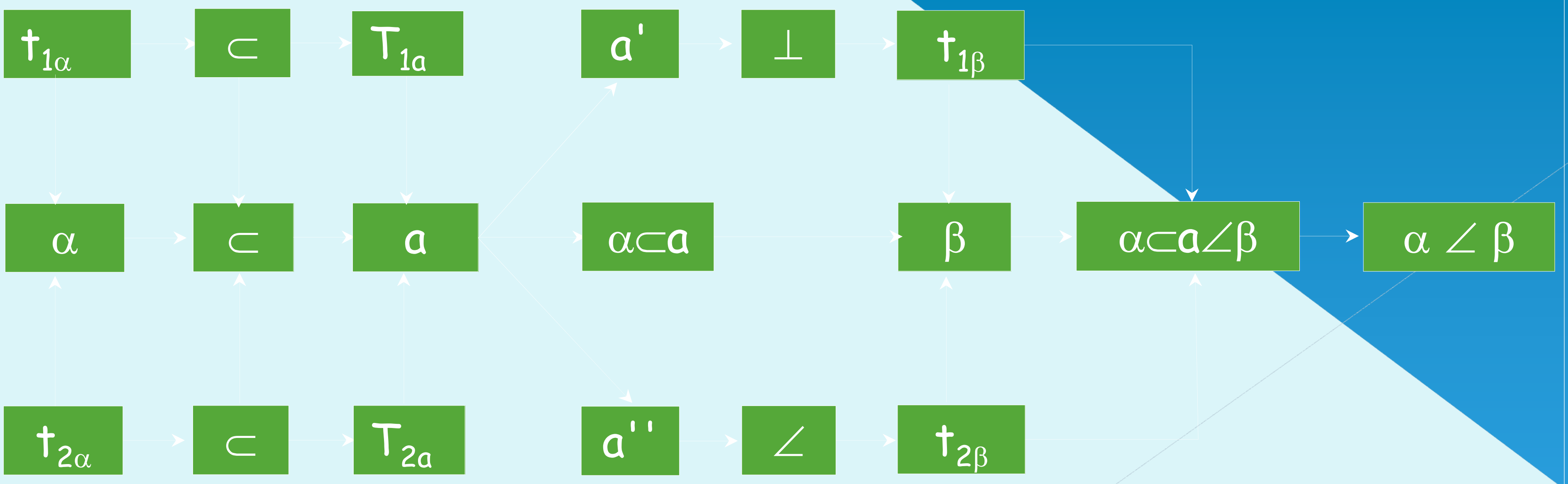


Fig.23 | Ortogonalità tra piani (verifica)

E' solo il caso di accennare che si può pervenire allo stesso risultato imponendo l'ortogonalità tra $t_{1\beta}$ e la proiezione a' di una retta $a \in \alpha$. Così operando si determina una a'' che appartiene ad α ma che non è perpendicolare a $t_{2\beta}$, tanto per confermare che $\alpha \angle \beta$ (Fig.23)

I passaggi, per il controllo e la verifica delle leggi descrittive, possono essere espressi in modo sintetico mediante la seguente simbologia dell'algoritmo grafico



PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
INDAGINE ESPLICATIVA (4)

Le stesse operazioni di verifica possono essere sviluppate, reciprocamente, operando sul piano β con la retta b come in figura 24

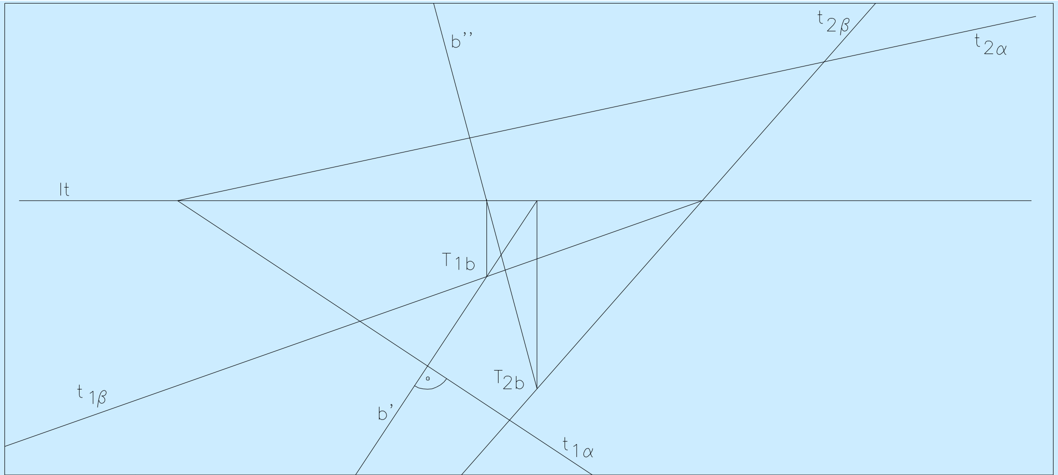


Fig.24 Ortogonalità tra piani (verifica)

Quindi si conduce la retta $b \in \beta$ che abbia la proiezione b' ortogonale alla $t_{1\alpha}$: ($b' \perp t_{1\alpha}$).

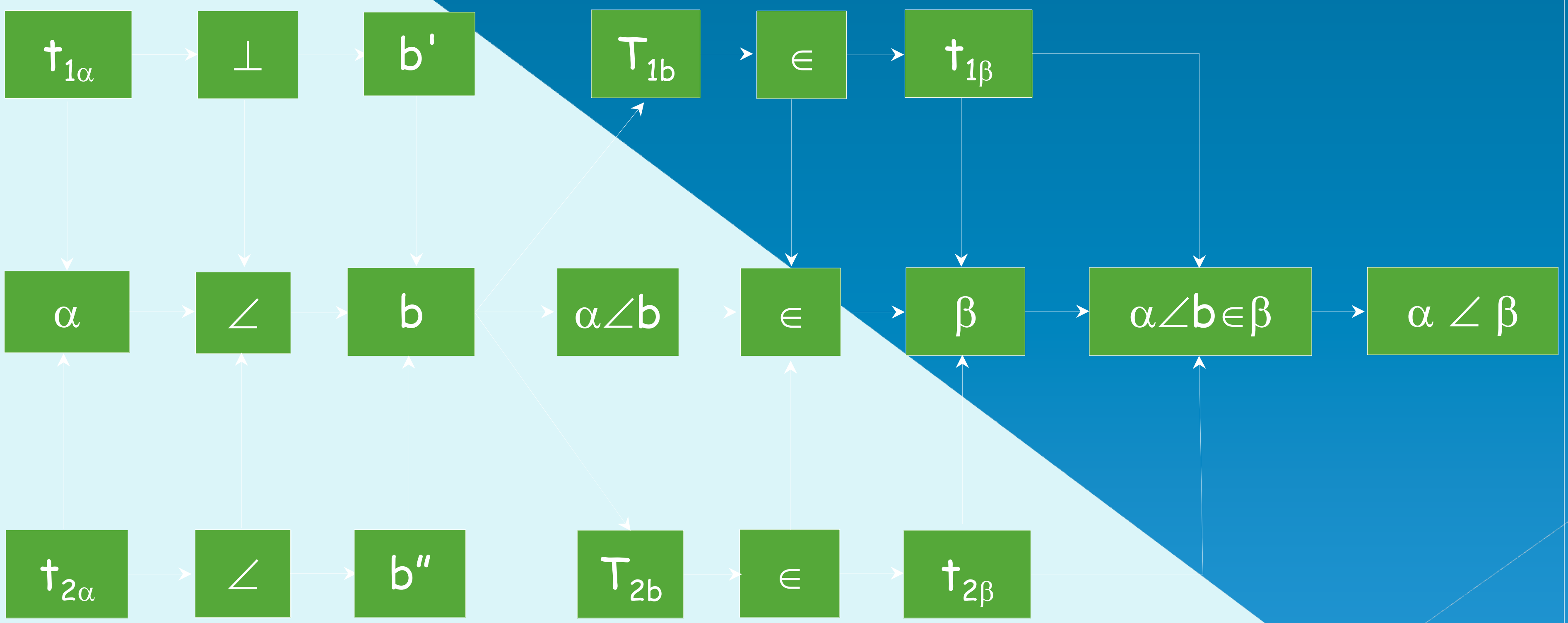
Se nella determinazione di b'' si verifica che anche $b'' \perp t_{2\alpha}$, allora possiamo dire di avere analizzato e verificato l'ortogonalità tra i due piani, tanto da poter asserire che $\alpha \perp \beta$, altrimenti sarà $\alpha \angle \beta$ perché non verifica quanto esplicitato nella seconda immagine della diapositiva n°7

Stabilito quanto sopra, nel caso graficizzato in figura 24, poiché $b'' \angle t_{2\alpha}$ si evince che sarà, più genericamente, $\alpha \angle \beta$ e quindi asserire che i due piani sono in rapporto di obliquità.

$\alpha \angle \beta$

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
INDAGINE ESPLICATIVA (5)

I passaggi, per il controllo e la verifica della legge descrittiva, possono essere espressi in modo sintetico mediante la seguente simbologia dell'algoritmo grafico relativo



Anche in questa occasione è solo il caso di accennare che si può pervenire allo stesso risultato imponendo la perpendicolarità tra $t_{2\alpha}$ e la proiezione b'' di una retta b appartenente al piano β.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
INDAGINE ESPLICATIVA (6)

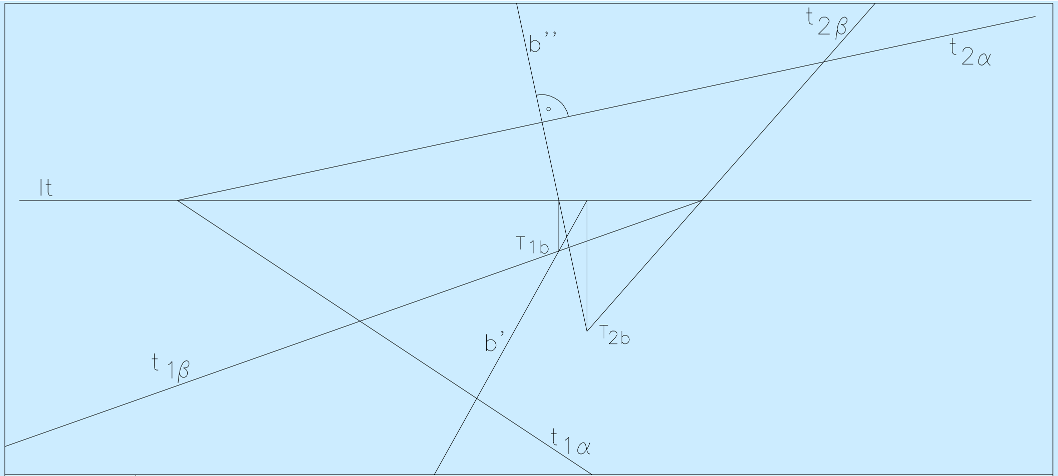
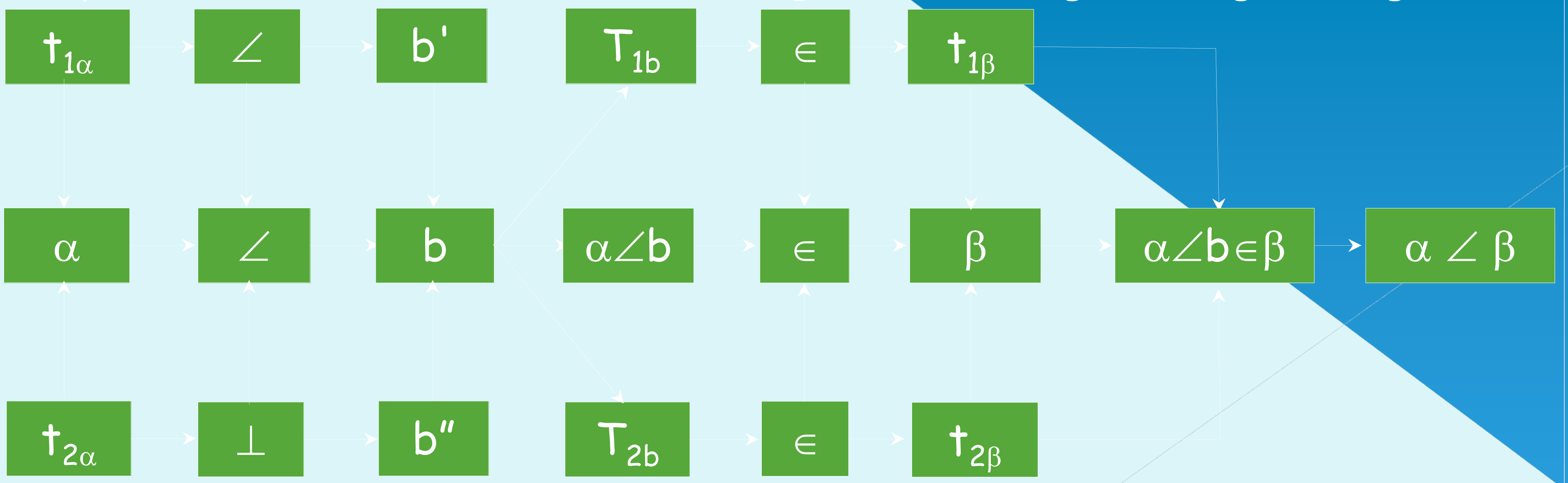


Fig.25 Ortogonalità tra piani (verifica)

Così operando,infatti,si determina una proiezione b' che appartiene al piano β ; $T_{1b} \in t_{1\beta}$ ma che non è perpendicolare a $t_{1\alpha}$. Tanto a conferma del rapporto di obliquità tra i piani.

Da questa verifica si evince che i piani della fig. 25 sono in rapporto di obliquità,rapporto che si può riassumere come $\alpha \angle \beta$.

I passaggi, per il controllo e la verifica delle leggi descrittive, possono essere espressi in modo sintetico mediante la seguente simbologia dell'algoritmo grafico



PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
INDAGINE ESPLICATIVA (7)

Palesemente, le elaborazioni sviluppate verificano una sola delle condizioni geometriche che legano i due elementi (verificano l'appartenenza e /o contenenza ma non l'ortogonalità).

Di conseguenza la verifica della perpendicolarità tra due piani può ricercarsi anche partendo dalla perpendicolarità tra un piano ed una retta, che si ipotizza, appartenente all'altro piano e verificare, poi l'eventuale condizione di appartenenza.

In quest'ipotesi la verifica si sviluppa nel modo seguente

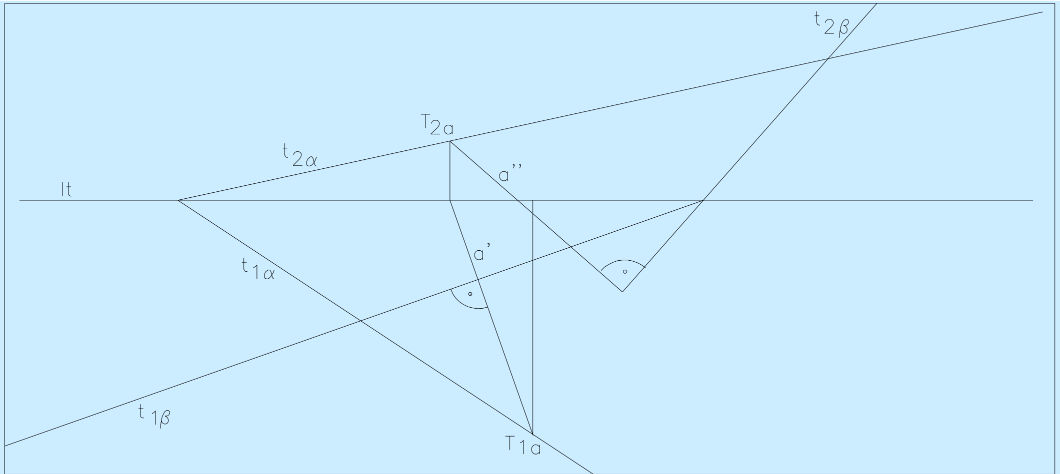


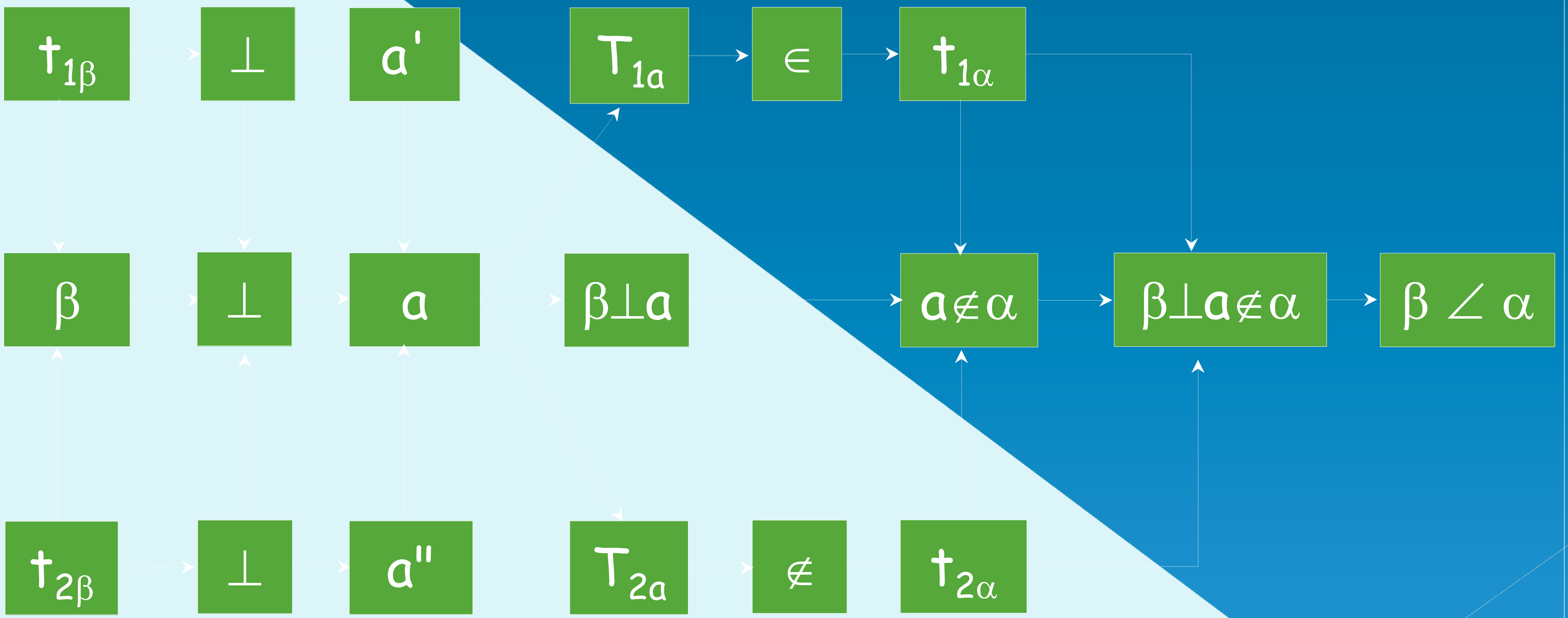
Fig.26 Ortogonalità tra piani (verifica mediante l'appartenenza)

Dati i piani $\alpha(t_{1\alpha},t_{2\alpha})$ e $\beta(t_{1\beta},t_{2\beta})$ (Fig.26), si conduce la proiezione a' di una retta a che si ipotizza appartenente al piano α tanto che $T_{1a}\in t_{1\alpha}$ ed è perpendicolare alla prima traccia del piano β: cioè sia $a'\perp t_{1\beta}$.

Definita la proiezione a' è possibile individuare $T_{2a}\in t_{2\alpha}$ perché sia $a\in\alpha$; quindi per T_{2a} si conduce la proiezione a'' facendo in modo che sia ortogonale a $t_{2\beta}$: $a''\perp t_{2\beta}$. Si evidenzia, così operando, che la proiezione a'' per essere perpendicolare a $t_{2\beta}$ non verifica l'appartenenza al piano α e quindi non risponde a quanto definito nella seconda immagine della diapositiva 9

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
INDAGINE ESPLICATIVA (8)

I passaggi, per il controllo e la verifica della legge descrittiva, possono essere espressi in modo sintetico mediante la seguente simbologia dell'algoritmo grafico relativo



Anche in questo caso è sufficiente accennare che si perviene allo stesso risultato se si inizia l'operazione sulla seconda proiezione (Fig.27)- diapositiva successiva- costruita, pertanto, la proiezione $b'' \perp t_{2\beta}$, si individua $T_{2b} \in t_{2\alpha}$ e quindi, di conseguenza, si definisce $b' \perp t_{1\beta}$.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
INDAGINE ESPLICATIVA (9)

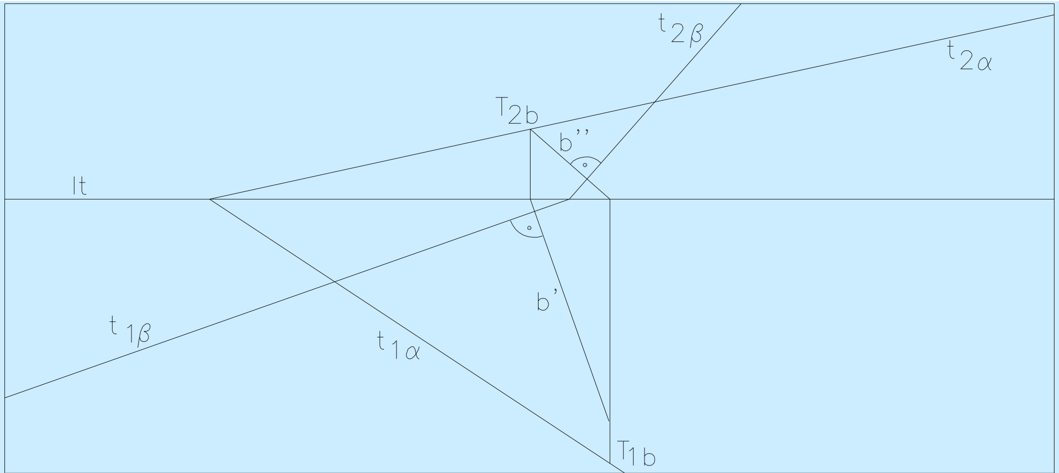
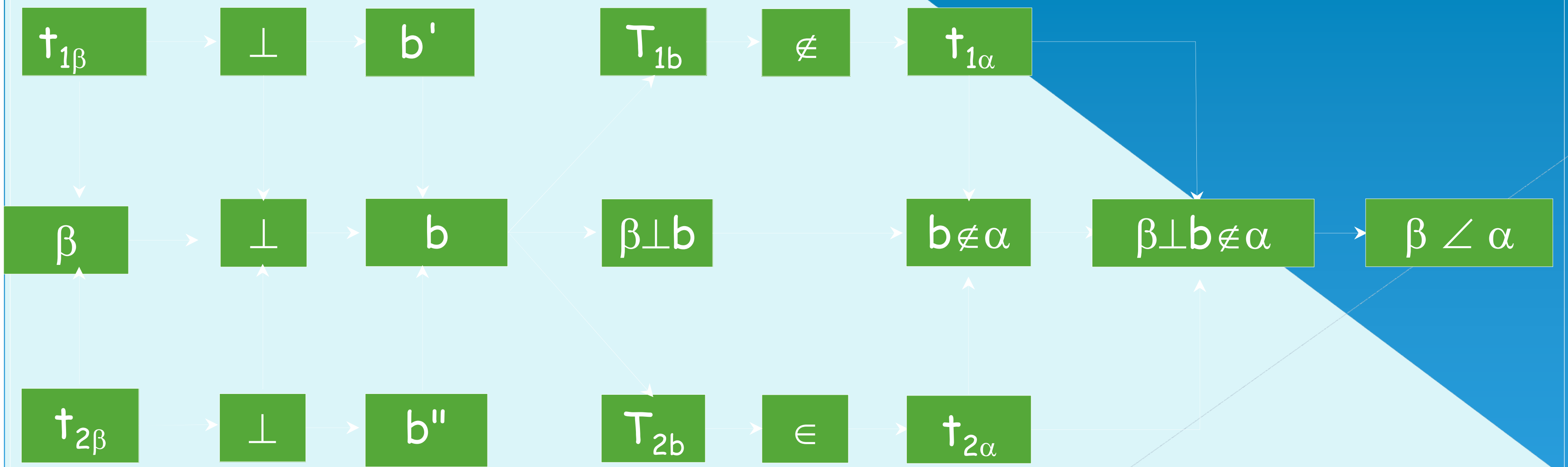


Fig.27 Ortogonalità tra piani (verifica mediante l'appartenenza)

Le risultanze grafiche mostrano, però, che non si determina l'appartenenza della retta b al piano α in quanto $T_{1b} \notin t_{1\alpha}$ e quindi non verifica quanto esplicitato nella seconda immagine riportata nella diapositiva n° 9

I passaggi, per il controllo e la verifica delle leggi descrittive, possono essere espressi in modo sintetico mediante la seguente simbologia dell'algoritmo grafico



PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
INDAGINE ESPLICATIVA (10)

Nei casi precedenti abbiamo riscontrato che le operazioni grafiche di verifica e/o ricerca dell'ortogonalità, ci hanno evidenziato una posizione di obliquità tra i due elementi geometrici.

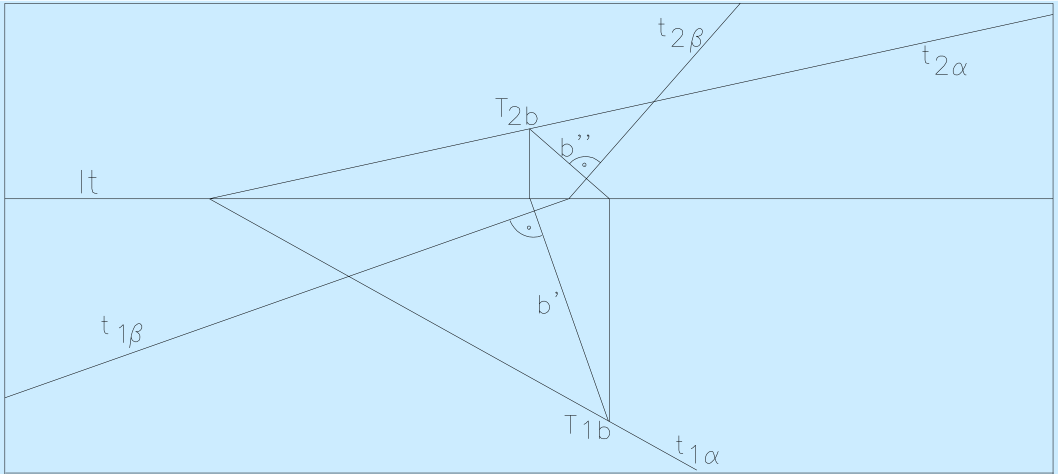


Fig.28 Piani ortogonali (1 procedura)

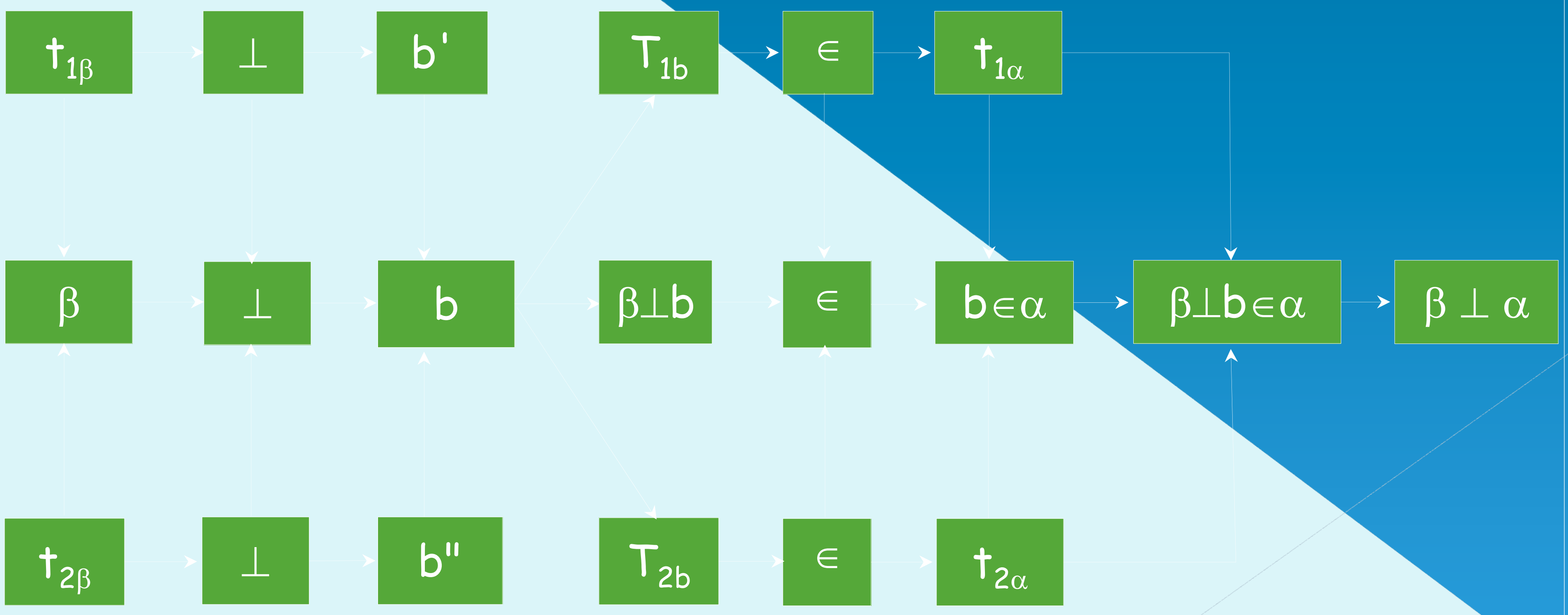
I piani sono in rapporto di ortogonalità, rapporto geometrico concreto definito e costante se, sviluppando le operazioni grafiche di verifica, si perviene ai risultati evidenziati nella figura 28

Dati i piani $\alpha(t_{1\alpha},t_{2\alpha})$ e $\beta(t_{1\beta}, t_{2\beta})$, si conduce per il piano α la retta $b\in\alpha$ che abbia la proiezione b' ortogonale a $t_{1\beta}$, sia cioè $b'\perp t_{1\beta}$. Successivamente si fissa, in modo univoco, la proiezione b" della stessa retta b.

Se ne scaturisce una proiezione b" appartenente al piano α e, nel contempo, ortogonale a $t_{2\beta}$ allora, poiché si verificano pienamente sia la condizione di appartenenza sia quella di ortogonalità in modo continuo e costante, si può asserire che i due piani α e β sono tra loro in rapporto geometrico concreto, definito continuo e costante detto di ortogonalità verificando quanto alla diapositiva n° 9

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
INDAGINE ESPLICATIVA (11)

I passaggi, per il controllo e la verifica della legge descrittiva, possono essere espressi, in modo sintetico, mediante la seguente simbologia e relativo algoritmo grafico.



PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
INDAGINE ESPLICATIVA (12)

Ricordiamo che si può pervenire allo stesso risultato iniziando la verifica grafica dalla seconda proiezione (figura 29) imponendo, quindi, la perpendicolarità tra la proiezione b'' di una retta b e la traccia $t_{2\beta}$.

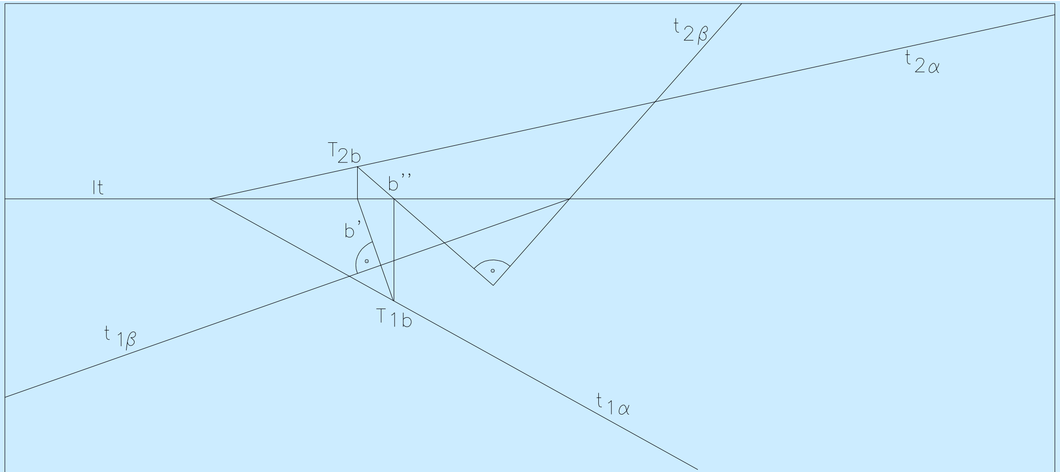


Fig.29 Piani ortogonali (2 procedura)

Così procedendo si determina una proiezione b' che, oltre ad essere appartenente al piano α si caratterizza ortogonale alla prima traccia del piano β, si ha cioè, in modo sintetico: $b' \perp t_{1\beta}$.

A seguito di questa doppia verifica, possiamo asserire che i due piani sono, tra loro, in rapporto geometrico di ortogonalità o perpendicolarità; cioè in forma sintetica si ha:

$$\alpha \perp \beta$$

E' solo il caso di accennare che, in caso di verifica, essendo il legame biunivoco si ha

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \beta \perp \alpha$$

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
INDAGINE ESPLICATIVA (13)

Pertanto le operazioni di verifica possono essere sviluppate invertendo le condizioni geometriche tra gli elementi, cioè operando con le condizioni di appartenenza sul piano β e con quelle di ortogonalità sulle tracce del piano α come in figura 30

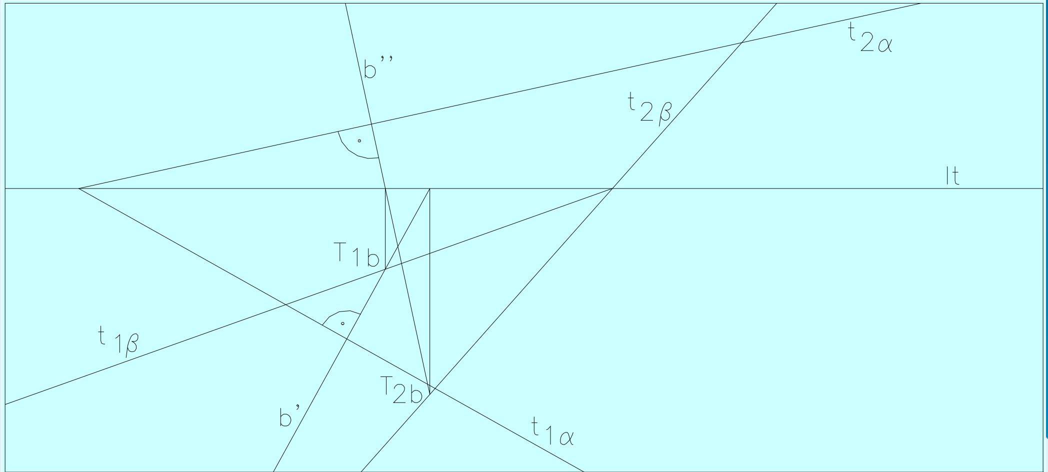
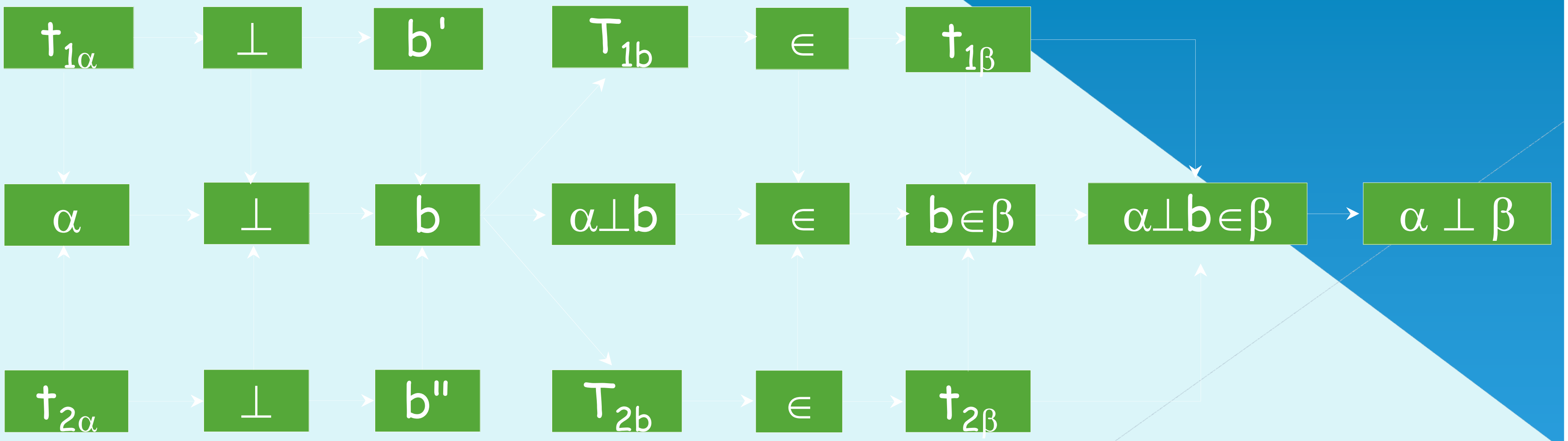


Fig.30 Piani ortogonali (3 procedura)

Dati i piani α e β, si determina la proiezione b' ortogonale a $t_{1\alpha}$, di una retta $b \in \beta$, per cui sarà $T_{1b} \in t_{1\beta}$.

Completando si perviene alla determinazione della proiezione b'' e della traccia T_{2b}. Se nel determinare b'' si riscontra che essa è perpendicolare a $t_{2\alpha}$: cioè $b'' \perp t_{2\alpha}$, allora possiamo asserire che sarà, in generale $\alpha \perp \beta$



PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
INDAGINE ESPLICATIVA (14)

Anche in questa occasione è solo il caso di accennare che si perviene allo stesso risultato se le operazioni di verifica vengono impostate iniziando dalla proiezione su π_2

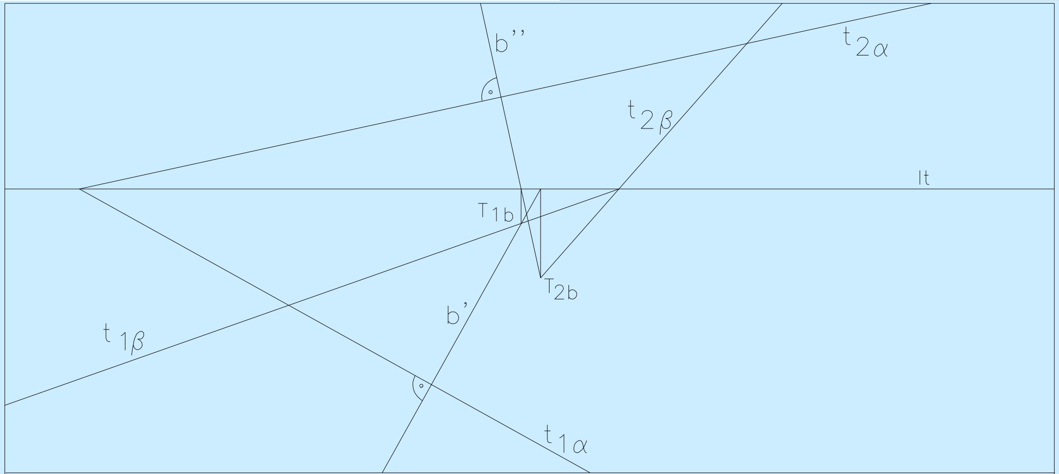


Fig.31 Piani ortogonali (4 procedura)

Infatti (figura 31), definita la proiezione b'' perpendicolare a $t_{2\alpha}$, di una retta $b \in \beta$, resta univocamente determinata la proiezione b' che risulterà ortogonale alla traccia $t_{1\alpha}$, quindi sarà: $(b' \perp t_{1\alpha})$.

Resta dimostrato, così, allo stesso modo, la legge dell'ortogonalità esistente tra i due piani α e β.

$$\alpha \perp \beta$$

E' solo il caso di ricordare, ancora una volta, che, in caso di verifica, essendo il legame biunivoco si ha

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \beta \perp \alpha$$

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO

PROCEDURA APPLICATIVA O IMPOSITIVA (1)

Se le condizioni devono essere imposte, durante lo sviluppo di una elaborazione grafica, si opera come di seguito

Acquisita la definizione esplicitata, dato un piano, per determinarne uno ortogonale si sviluppano i seguenti passaggi

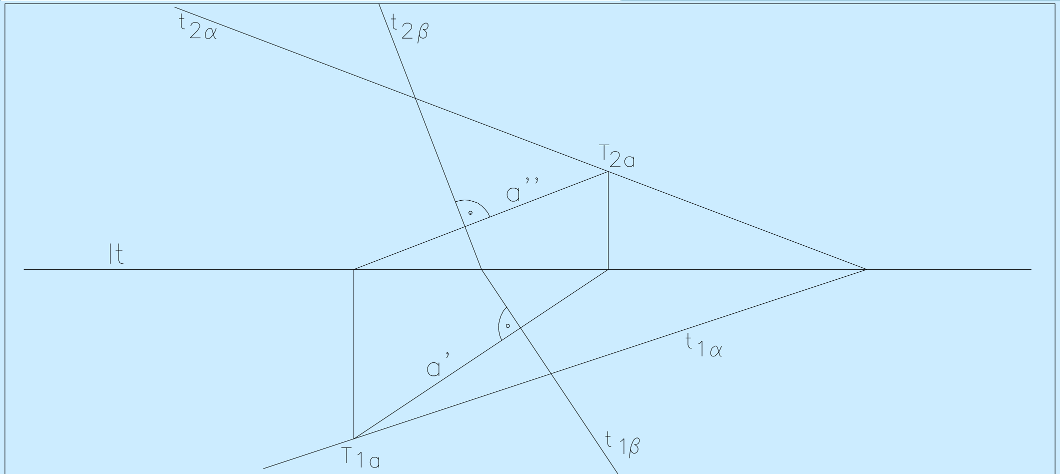


Fig.32 Ortogonalità tra piani (impostazione)

Dato il piano generico α (figura 32) rappresentato mediante le due tracce $t_{1\alpha}$ e $t_{2\alpha}$, volendo definire $\beta\perp\alpha$, basta determinare una retta $a\in\alpha$ per cui le tracce della retta a apparterranno alle tracce del piano α. Restano così determinate le proiezioni a' ed a'' della retta a.

Applicando, ora, le condizioni di ortogonalità le tracce del piano β si disporranno perpendicolari alle proiezioni delle rette facendo in modo che siano incidenti alla lt; quindi si costruirà $t_{1\beta}\perp a'$ e $t_{2\beta}\perp a''$

In questa posizione il piano β risulta essere perpendicolare alla retta a che a sua volta appartiene al piano α, quindi il piano α risulterà perpendicolare al piano β:($\alpha\perp\beta$) risultando così applicata ed imposta la condizione di ortogonalità tra piani

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO

PROCEDURA APPLICATIVA O IMPOSITIVA (2)

Questo doppio legame può essere sintetizzato dalla seguente formalizzazione insiemistico - descrittiva.

$\alpha \perp \beta$ → $\alpha \subset a \perp \beta$

$t_{1\alpha} \subset T_{1a}$

$t_{2\alpha} \subset T_{2a}$

$a' \perp t_{1\beta}$

$a'' \perp t_{2\beta}$

Poiché il rapporto è biunivoco sarà anche possibile impostare l'ortogonalità di α rispetto al piano β secondo la seguente formalizzazione insiemistica

$\beta \perp \alpha$ → $\beta \subset b \perp \alpha$

$t_{1\beta} \subset T_{1b}$

$t_{2\beta} \subset T_{2b}$

$b' \perp t_{1\alpha}$

$b'' \perp t_{2\alpha}$

Pertanto, dato un piano α, il piano β sarà perpendicolare al piano dato se le sue tracce sono ortogonali alle proiezioni di una retta appartenente al piano dato

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
PROCEDURA APPLICATIVA O IMPOSITIVA (3)

Le stesse regole, espresse mediante la legge dell'appartenenza,assumono la seguente formalizzazione esplicitata dal successivo algoritmo grafico

$t_{1\beta} \perp a'$
$t_{2\beta} \perp a''$

$\beta \perp \alpha$ → $\beta \perp a \in \alpha$

$T_{1a} \in t_{1\alpha}$
$T_{2a} \in t_{2\alpha}$

biunivocamente

$t_{1\alpha} \perp b'$
$t_{2\alpha} \perp b''$

$\alpha \perp \beta$ → $\alpha \perp b \in \beta$

$T_{1b} \in t_{1\beta}$
$T_{2b} \in t_{2\beta}$

Definiti e giustificati i vincoli di cui sopra, la condizione geometrico-descrittiva generale della perpendicolarità tra piani può essere così enunciata.

Dato un piano, per definirne un altro in rapporto geometrico di ortogonalità, è necessario che questi contenga una retta perpendicolare a quello dato.

Più semplicemente e generalizzando possiamo esporre la seguente enunciazione.

Perché due piani siano in rapporto geometrico di ortogonalità è necessario che uno di essi contenga una retta perpendicolare all'altro

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO - PIANO
QUADRO SINOTTICO DELLA CONDIZIONE DI ORTOGONALITA' TRA PIANI

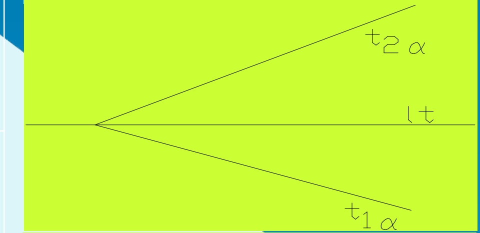
CARATTERISTICHE DEGLI ELEMENTI GEOMETRICI

Elemento geometrico	Didascalia elemento	Didascalia elemento rappresentativo	Nomenclatura dell'elemento rappresentativo	Definizione geometrica elemento rapprsentativo	Definizione fisica dell'elemento rapprsentativo
Piano	α	$t_{1\alpha}$	1ª traccia	Retta	Reale
		$t_{2\alpha}$	2ª traccia	Retta	Reale
Piano	β	$t_{1\beta}$	1ª traccia	Retta	Reale
		$t_{2\beta}$	2ª traccia	Retta	Reale

PERPENDICOLARITA' TRA PIANI

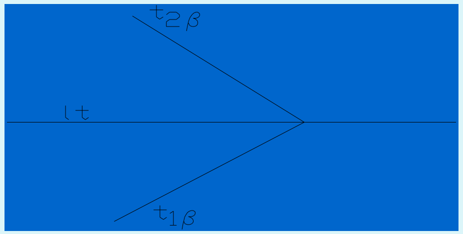
Definizione grafica e descrittiva degli elementi geometrici

$$t_{2\alpha} = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overline{\overline{T}}_{2r} \right\}$$



$$t_{1\alpha} = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overline{\overline{T}}_{1r} \right\}$$

$$t_{2\beta} = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overline{\overline{T}}_{2r} \right\}$$



$$t_{1\beta} = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overline{\overline{T}}_{1r} \right\}$$

Relazione insiemistica sintetica delle leggi della perpendicolarità tra piani

Formalizzazione esplicativa

$\alpha \subset a$; $a \perp \beta$ → $\alpha \subset a \perp \beta$ → $\alpha \perp \beta$

Biunivocamente

$\alpha \perp b$; $b \in \beta$ → $\alpha \perp b \in \beta$ → $\alpha \perp \beta$

Formalizzazione applicativa

$\alpha \perp \beta$ → $\alpha \subset a \perp \beta$ → $\alpha \subset a$; $a \perp \beta$

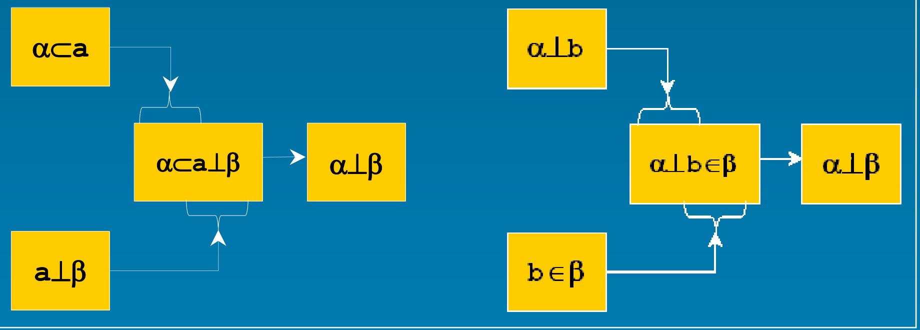
Biunivocamente

$\beta \perp \alpha$ → $\beta \subset b \perp \alpha$ → $\beta \subset b$; $b \perp \alpha$

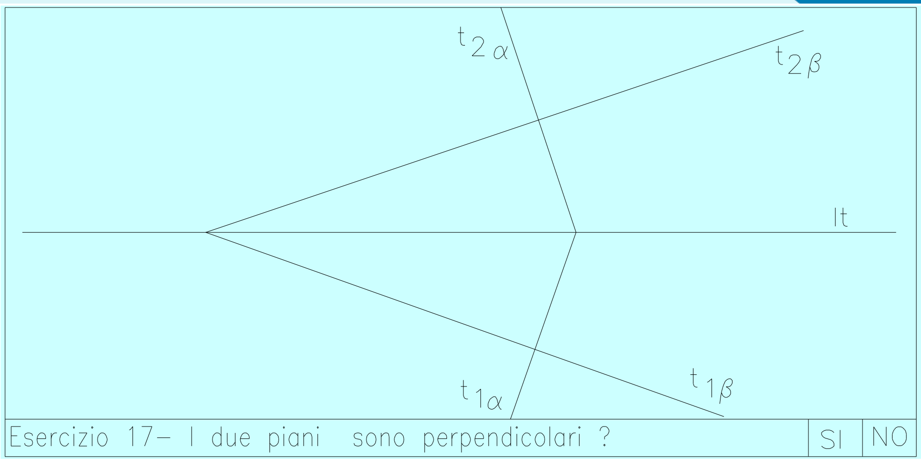
PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO-PIANO
ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA ESPLICATIVA (1)

Seguono alcune esemplificazioni grafiche relative all'aspetto esplicativo della perpendicolarità tra piani di diversa tipologia, variamente collocati nello spazio dei diedri.

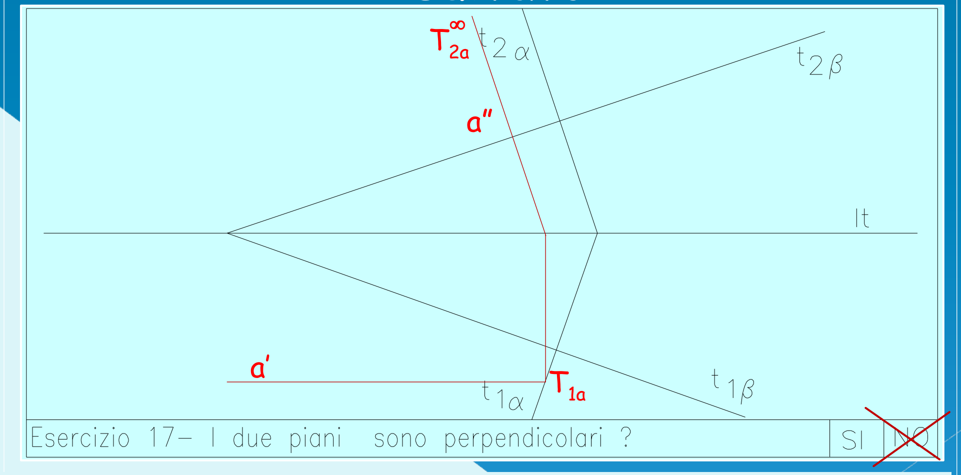
Date le seguenti formalizzazioni esplicative delle leggi di perpendicolarità, risolvere i grafici di seguito



Dato



Risultato



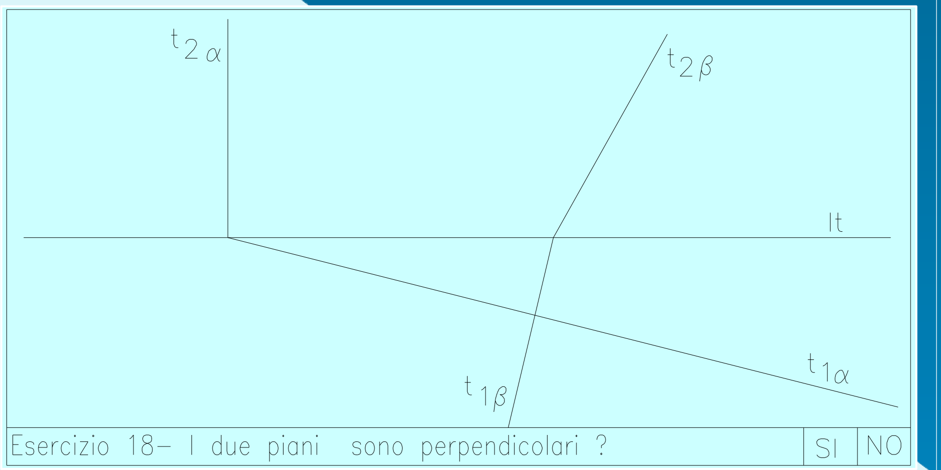
Spiegazione

Disegnando la proiezione a"$\perp t_{2\beta}$ si determina la traccia T^{∞}_{2a} impropria. Da ciò si deduce che la retta a è posta parallelamente al piano π_2.

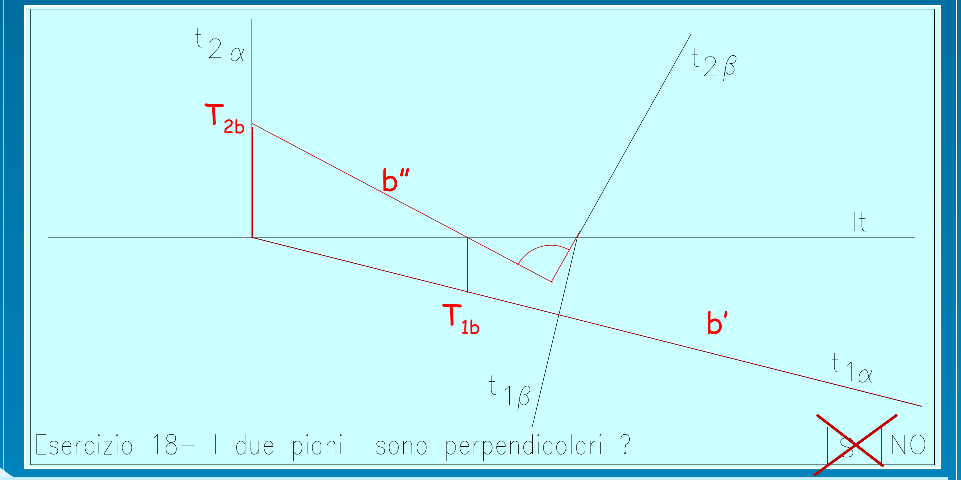
Mediante la retta di richiamo si determina la posizione della prima traccia della retta a come $T_{1a} \in t_{1\alpha}$. A causa della posizione impropria della traccia seconda di a, la proiezione a' sarà parallela alla lt identificandosi, così, una retta frontale che avrà a'$\angle$ $t_{1\beta}$. Quindi $\alpha \angle \beta$ perché $\alpha \subset a \angle \beta$.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO-PIANO
ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA ESPLICATIVA (2)

Dato



Risultato

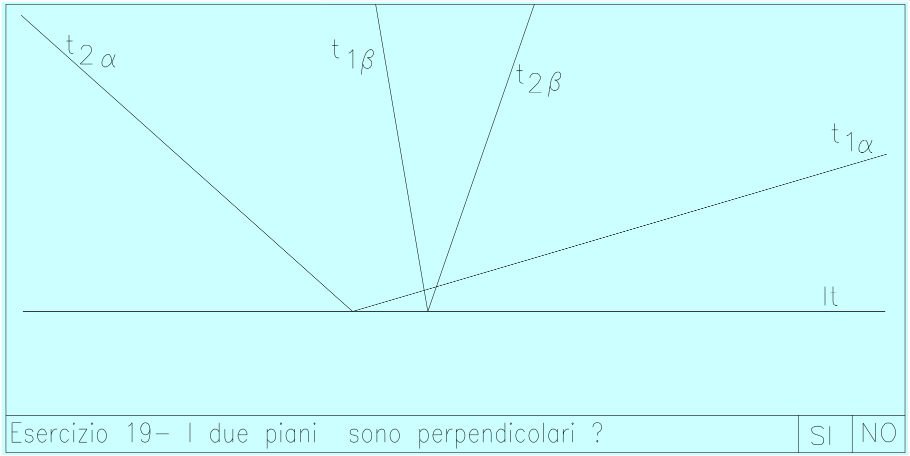


Spiegazione

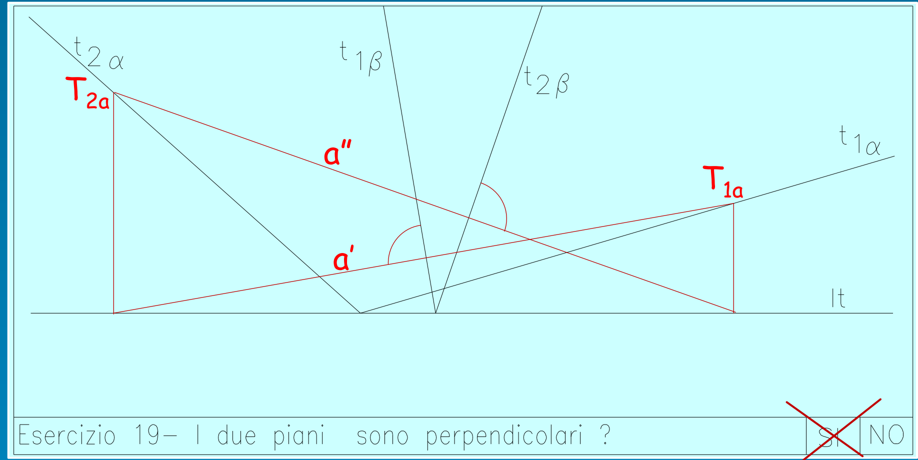
Essendo α un piano proiettante in prima conduciamo per esso una retta b che sia: $b\perp\beta$. Definiamo, quindi la proiezione $b'\perp t_{1\beta}$. In questo caso si verifica anche che sia $b'\equiv t_{1\alpha}$. Disegniamo, poi, la proiezione $b''\perp t_{2\beta}$. Definite le proiezioni della retta b ne ricerchiamo le tracce per verificarne l'appartenenza al piano α. Infatti la proiezione b" determina la $T_{2b}\in t_{2\alpha}$ mentre l'intersezione di b" con la lt determina la posizione della retta di richiamo della prima traccia di b che si colloca su $b'\equiv t_{1\alpha}$. Ne discende il verificarsi di $b\perp\beta$ ma anche $\alpha\subset b$. Allora possiamo dire che $a\subset b\perp\beta$; quindi $\alpha\perp\beta$.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO-PIANO
ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA ESPLICATIVA (3)

Dato



Risultato

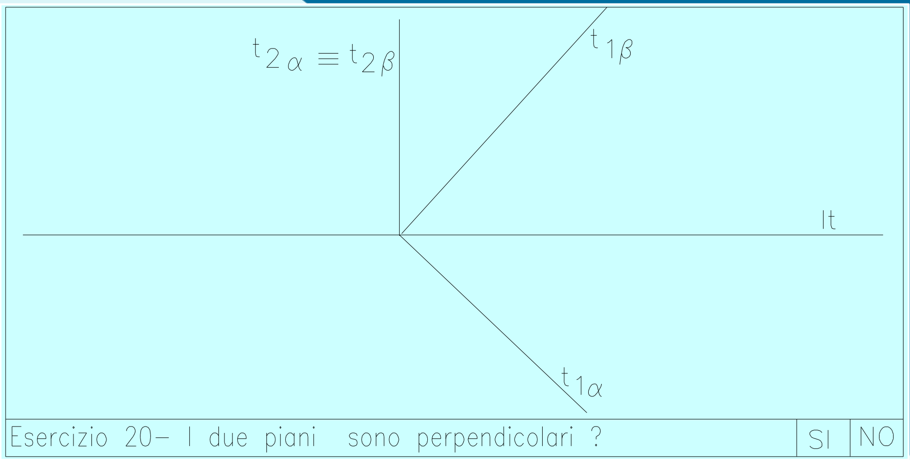


Spiegazione

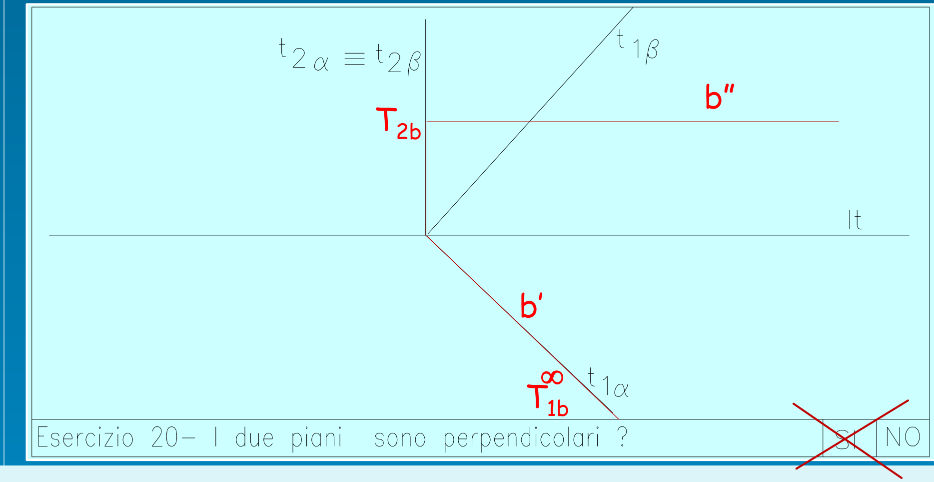
Per dare risposta alla domanda definiamo una retta $a \in \alpha$ che abbia le proiezioni ortogonali alle tracce del piano β . Definita la proiezione $a' \perp t_{1\beta}$ si individua la traccia $T_{1a} \in t_{1\alpha}$. Determinando il piede della traccia T_{1a} si disegna la proiezione $a'' \perp t_{2\beta}$ individuando, in modo univoco la traccia T_{2a} .
Poiché il piede della T2a costituisce, anche, il punto di passaggio della proiezione $a' \perp t_{1\beta}$ possiamo asserire che: $\alpha \subset a \perp \beta$ e quindi che $\alpha \perp \beta$. I due piani sono, quindi, in rapporto di ortogonalità .

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO-PIANO
ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA ESPLICATIVA (4)

Dato



Risultato



Spiegazione

I piani in oggetto sono due piani proiettanti in prima proiezione collocati rispettivamente α nel ID e β nel IID.

Per verificarne il rapporto di ortogonalità procediamo nel modo seguente.

Definiamo una retta $b \in \alpha$. Pertanto disegnando la proiezione $b'' \perp t_{2\alpha}$ individuiamo la $T_{2b} \in t_{2\alpha}$.

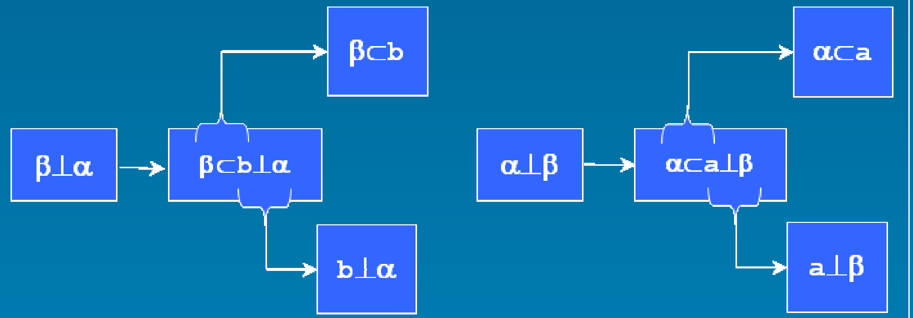
Per le caratteristiche geometriche del piano α la proiezione b' sarà una retta coincidente con $t_{1\alpha}$ ed avrà la traccia impropria: $\overset{\infty}{T}_{1b}$ definendo $b \in \alpha$.

Poiché la verifica di ortogonalità restituisce $b' \perp t_{1\beta}$, possiamo dire che i due piani α e β sono in rapporto di ortogonalità e, quindi in forma sintetica sarà $\alpha \perp \beta$.

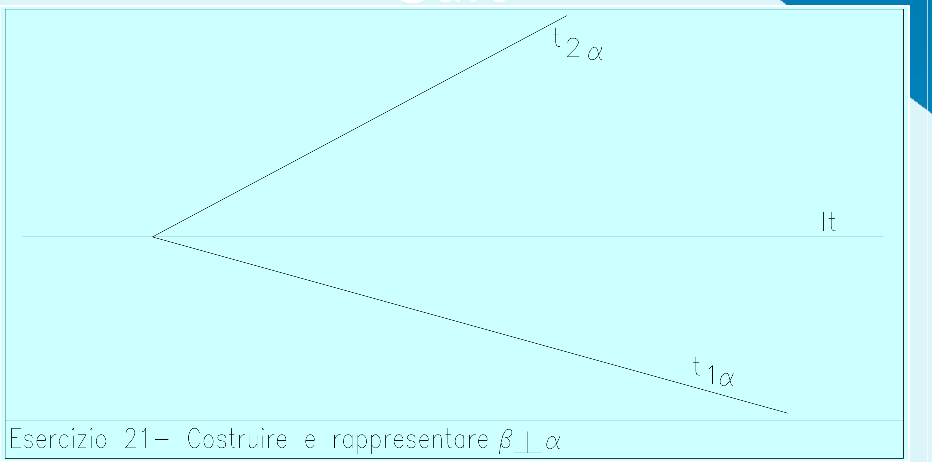
PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO-PIANO
ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA APPLICATIVA (1)

Seguono alcune esemplificazioni grafiche relative all'aspetto applicativo della perpendicolarità tra piani di diversa tipologia, variamente collocati nello spazio dei diedri.

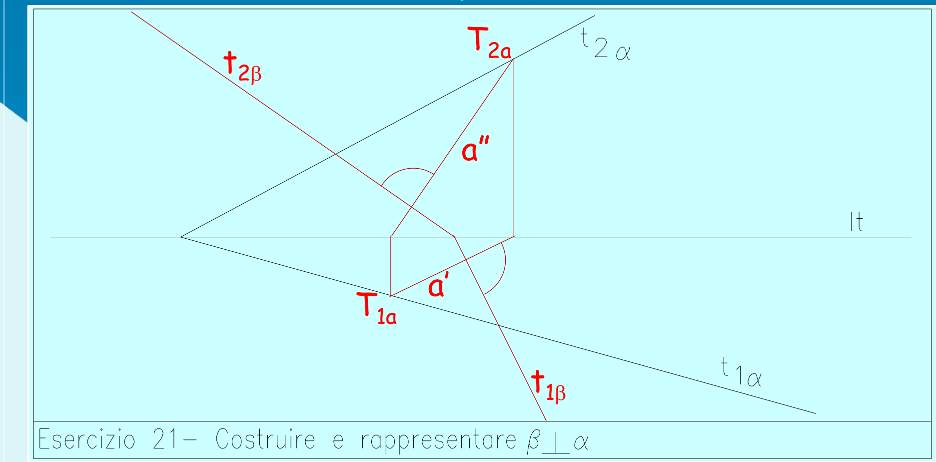
Date le seguenti formalizzazioni impositive delle leggi di perpendicolarità, risolvere i grafici di seguito



Dato



Risultato

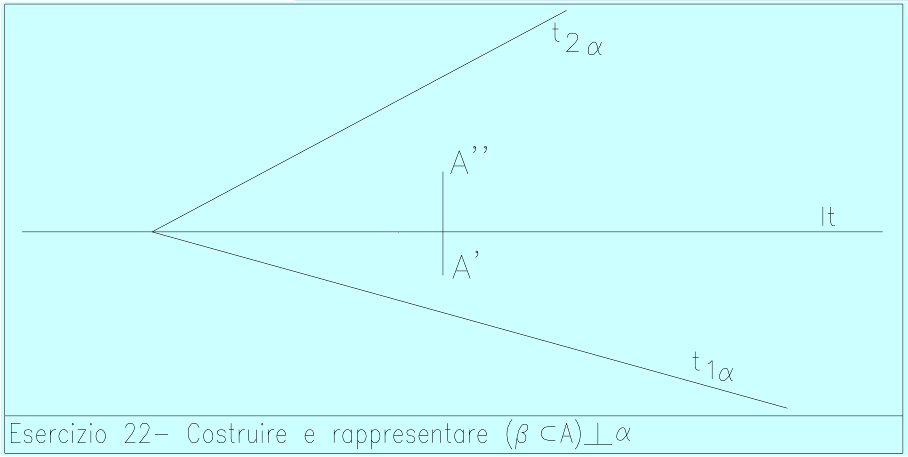


Spiegazione

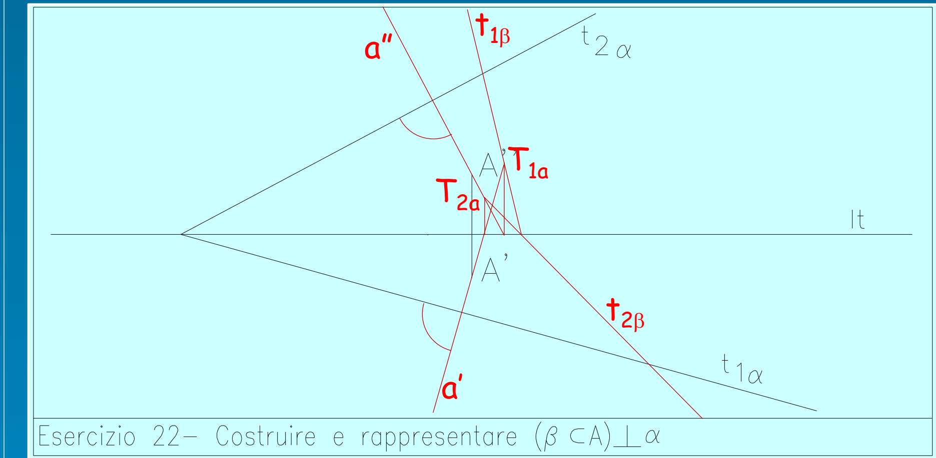
Si identifica, anzitutto, una retta appartenente al piano α. Nello specifico definita a' resta determinata la $T_{1a} \in t_{1\alpha}$. Dal piede della traccia seconda risaliamo alla sua posizione determinando $T_{2a} \in t_{2\alpha}$. Definito, poi, il piede della T_{1a} si rappresenta la proiezione a" della retta $a \in \alpha$. La determinazione del piano $\beta \perp \alpha$ avviene disegnando le tracce del piano β perpendicolari alle proiezioni della retta a. Per avere $\beta \perp \alpha$ sarà: $t_{1\beta} \perp a'$ ed anche $t_{2\beta} \perp a''$.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO-PIANO
ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA APPLICATIVA (2)

Dato



Risultato

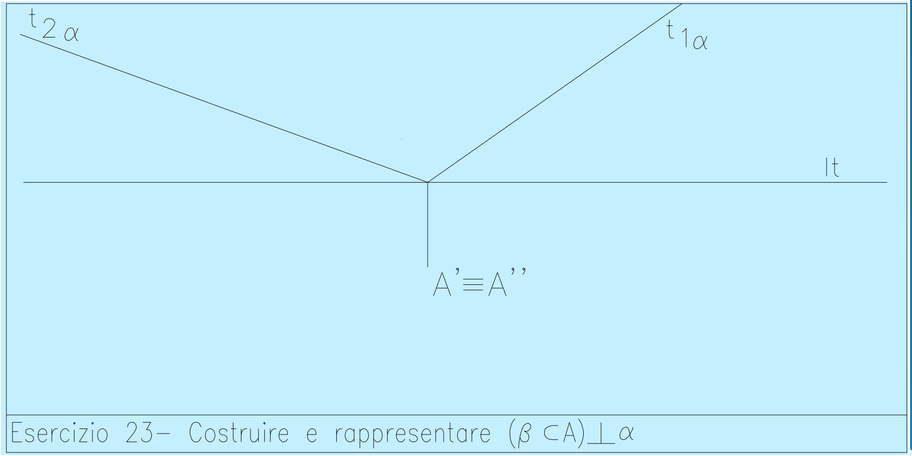


Spiegazione

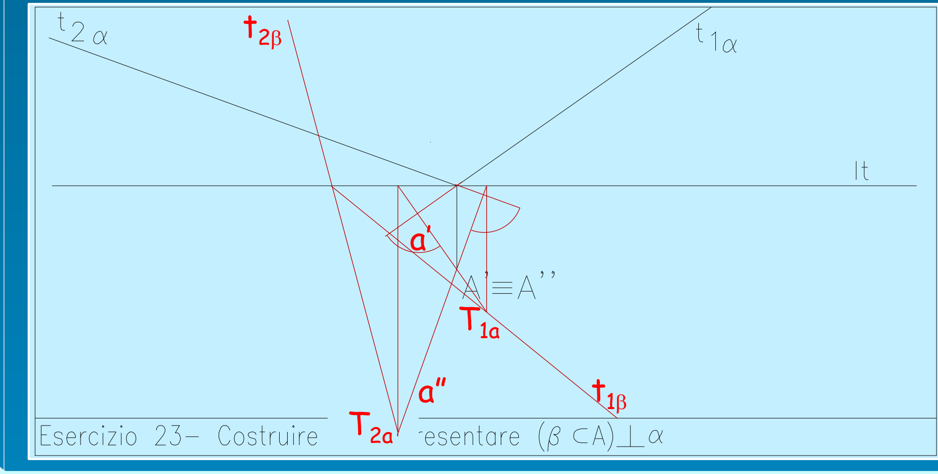
Per le immagini A'e A'' del punto A costruiamo le proiezioni di una retta a che, oltre a contenere il punto A: ($a \subset A$) sia anche perpendicolare al piano α. Per questi motivi le proiezioni della retta saranno geometricamente così caratterizzate:
($A' \in a' \perp t_{1\alpha}$) ed anche ($A'' \in a'' \perp t_{2\alpha}$).
Si completa la rappresentazione descrittiva della retta a individuando le due tracce T_{1a} e T_{2a}. A questo punto per risolvere il problema è sufficiente condurre, per la tracce della retta a le due tracce del piano β che saranno così caratterizzate:
($T_{1a} \in t_{1\beta}$) e ($T_{2a} \in t_{2\beta}$).
In questo modo si ha: ($\beta \subset a \perp \alpha$); quindi: ($\beta \perp \alpha$).

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO-PIANO
ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA APPLICATIVA (3)

Dato



Risultato

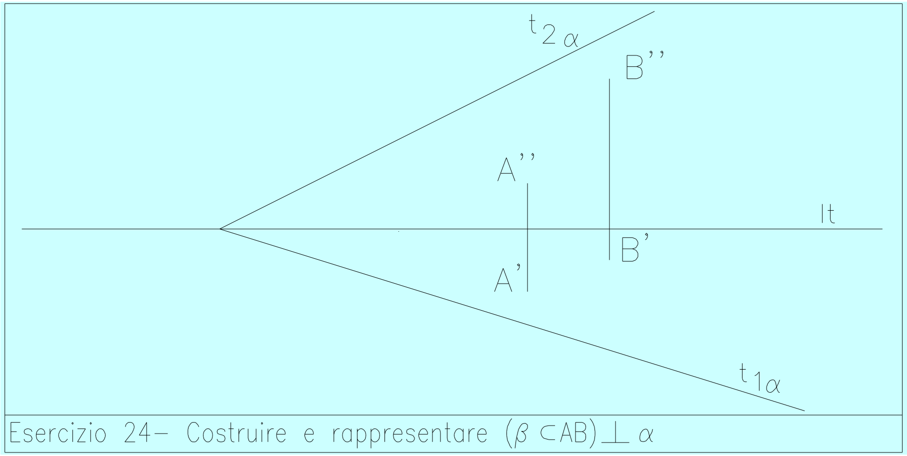


Spiegazione

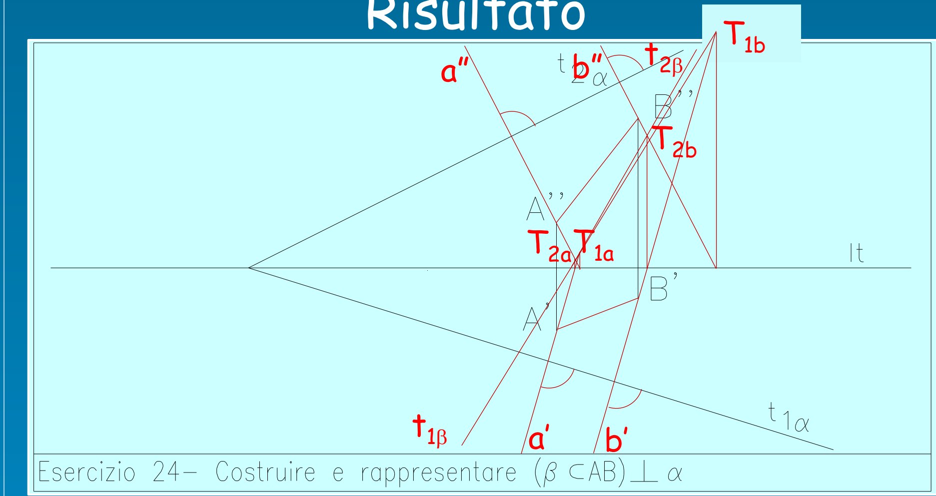
Salvo le diverse collocazioni spaziali del punto e del piano l'esercizio si presenta, nel procedimento, identico al precedente.
Per le immagini A'e A" del punto A costruiamo le proiezioni di una retta a che, oltre a contenere il punto A: $(a \subset A)$ sia anche perpendicolare al piano α. Per questi motivi le proiezioni della retta saranno geometricamente così caratterizzate: $(A' \in a' \perp t_{1\alpha})$ ed anche $(A'' \in a'' \perp t_{2\alpha})$. Si completa la rappresentazione descrittiva della retta a individuando le due tracce T_{1a} e T_{2a}.
A questo punto per risolvere il problema è sufficiente condurre, per la tracce della retta a le due tracce del piano β che saranno così caratterizzate: $(T_{1a} \in t_{1\beta})$ e $(T_{2a} \in t_{2\beta})$.
In questo modo si ha: $(\beta \subset a \perp \alpha)$; quindi: $(\beta \perp \alpha)$.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO-PIANO
ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA APPLICATIVA (4)

Dato



Risultato



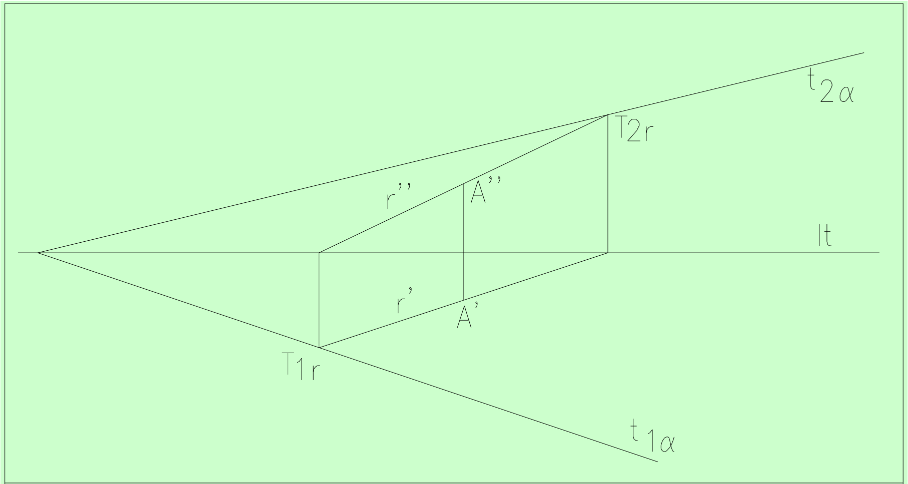
Spiegazione

Dopo aver definito il segmento AB collegando i due estremi, conduciamo per essi due rette a,b aventi le proiezioni ortogonali alle due tracce del piano a così caratterizzate: $(A' \in a' \perp t_{1\alpha})$; $(B' \in b' \perp t_{1\alpha})$; $(A'' \in a'' \perp t_{2\alpha})$; $(B'' \in b'' \perp t_{2\alpha})$.
Si completa, quindi, la rappresentazione delle due rette ricercando e identificando le quattro tracce: T_{1a}; T_{2a}; T_{1b}; T_{2b}.
A questo punto collegando T_{1a} con T_{1b} si determina la traccia $t_{1\beta}$ e collegando T_{2a} con T_{2b} si determina la traccia $t_{2\beta}$.
Quindi possiamo asserire che:
$[b \subset (a,b) \perp \alpha]$ e quindi $[b \subset (AB) \perp \alpha]$.

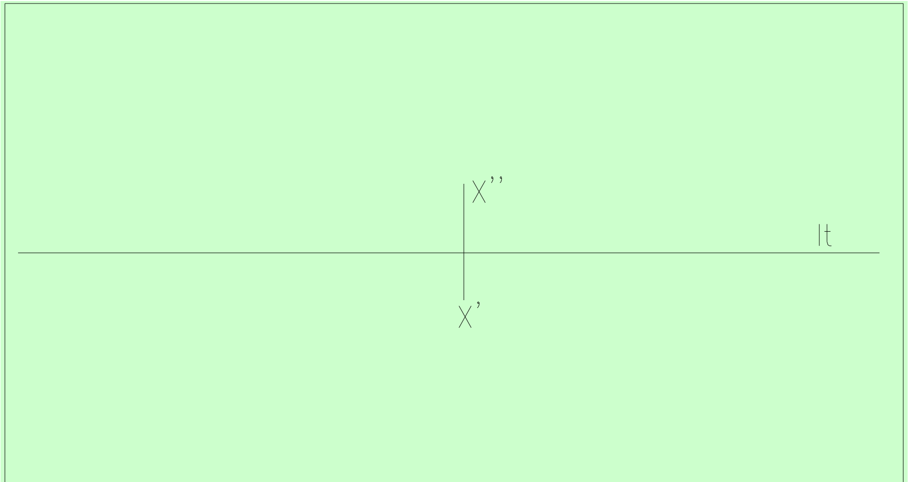
PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO-PIANO

PROPOSTE DI TEMI GRAFICI SULLA CONDIZIONE DI ORTOGONALITA' TRA PIANI (1)

Esercizio

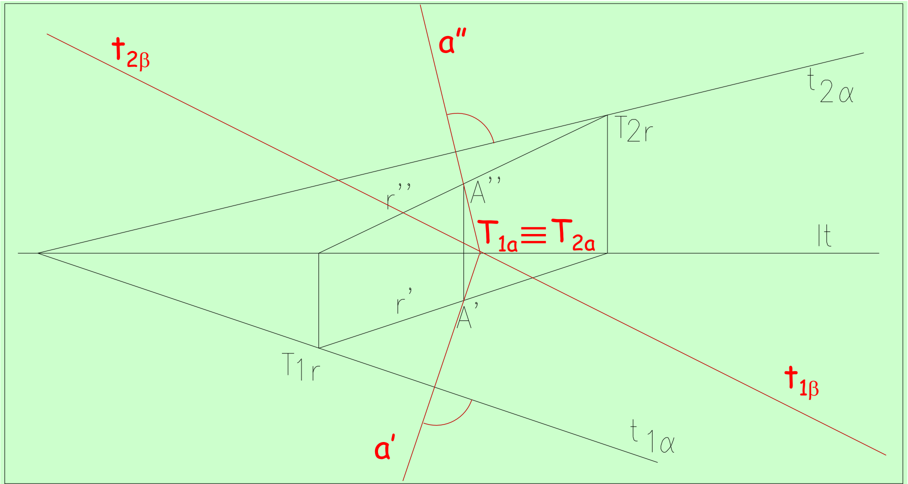


Tema 17– Costruire e rappresentare $(\beta \subset A) \perp \alpha$

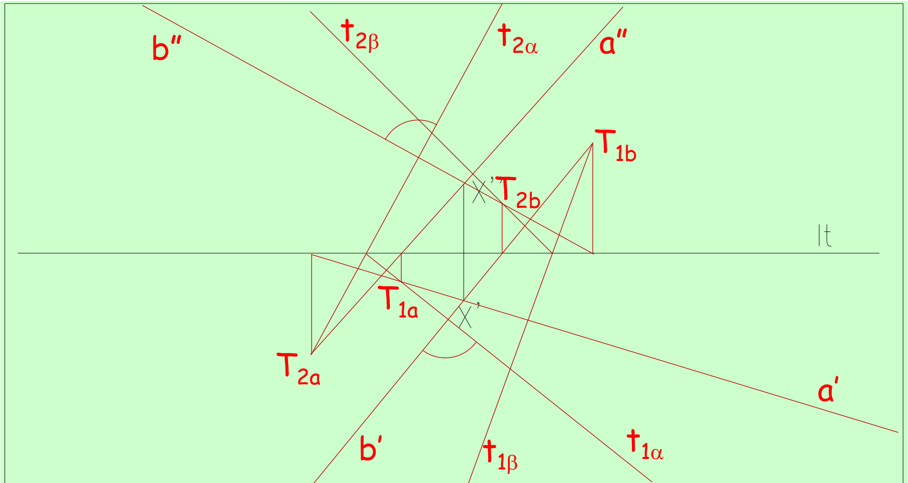


Tema 18– Costruire e rappresentare $(\alpha \subset X) \perp (\beta \subset X)$

Risoluzione



Tema 17– Costruire e rappresentare $(\beta \subset A) \perp \alpha$

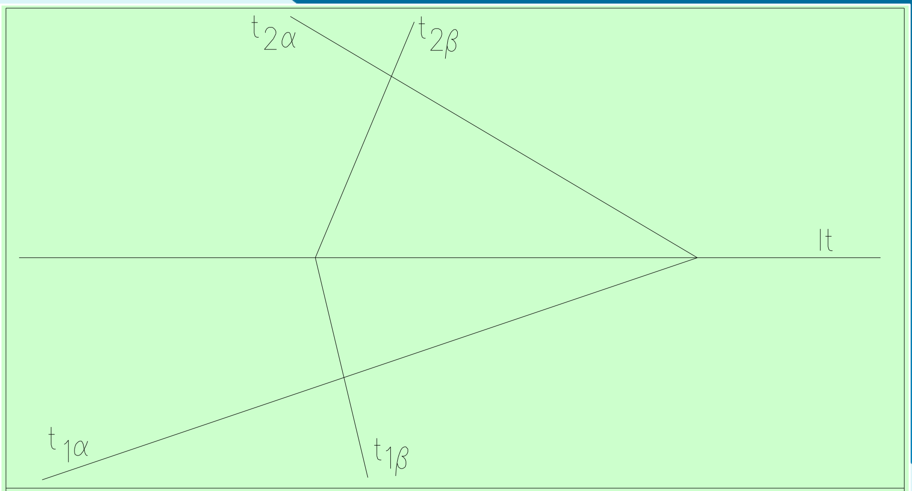


Tema 18– Costruire e rappresentare $(\alpha \subset X) \perp (\beta \subset X)$

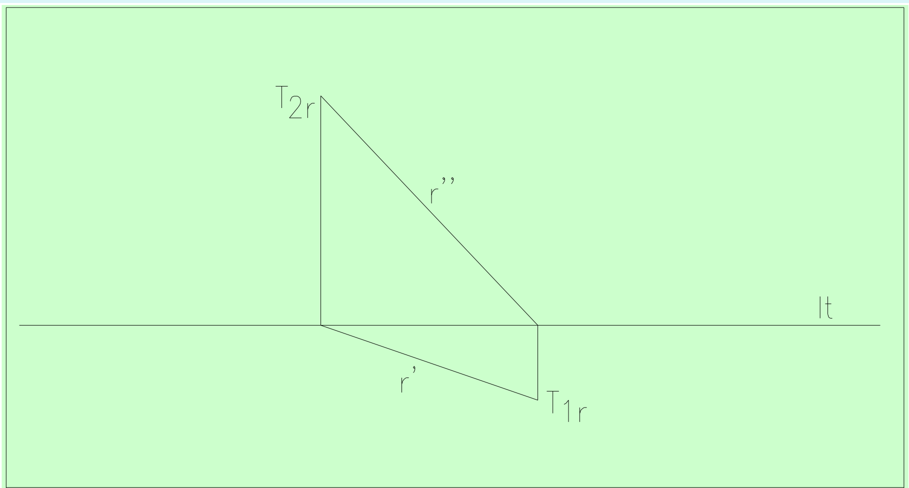
PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO-PIANO

PROPOSTE DI TEMI GRAFICI SULLA CONDIZIONE DI ORTOGONALITA' TRA PIANI (2)

Esercizio

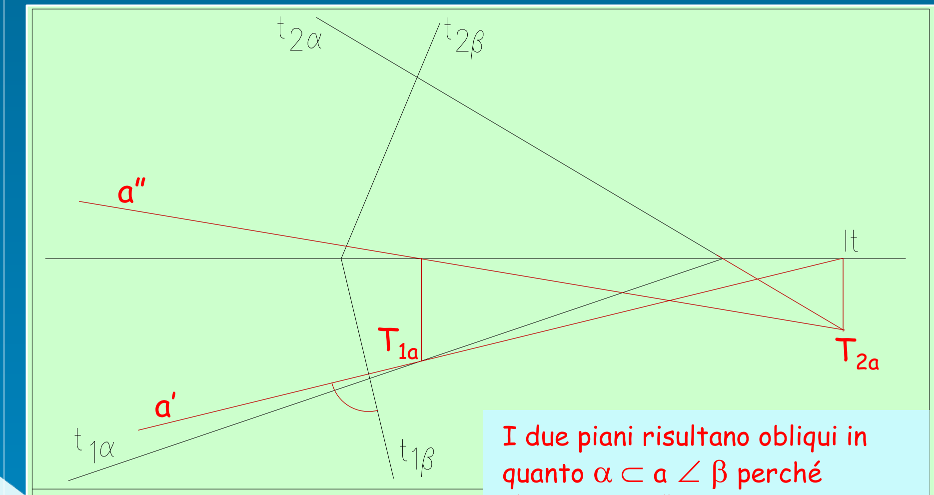


Tema 19– Verificare se $\alpha \perp \beta$



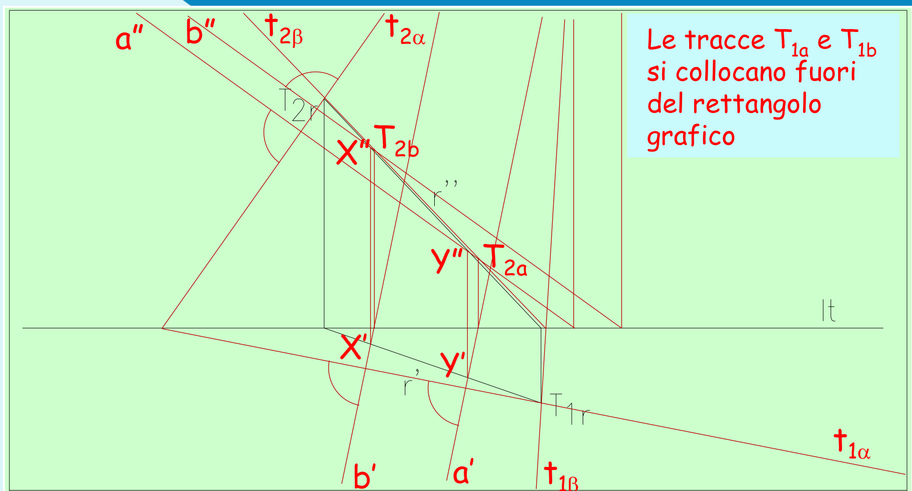
Tema 20– Costruire e rappresentare $(\alpha \subset r) \perp (\beta \subset r)$

Risoluzione



Tema 19– Verificare se $\alpha \perp \beta$

I due piani risultano obliqui in quanto $\alpha \subset$ a $\angle\ \beta$ perché a' $\perp$ $t_{1\beta}$ ma a" $\angle$ $t_{2\beta}$.



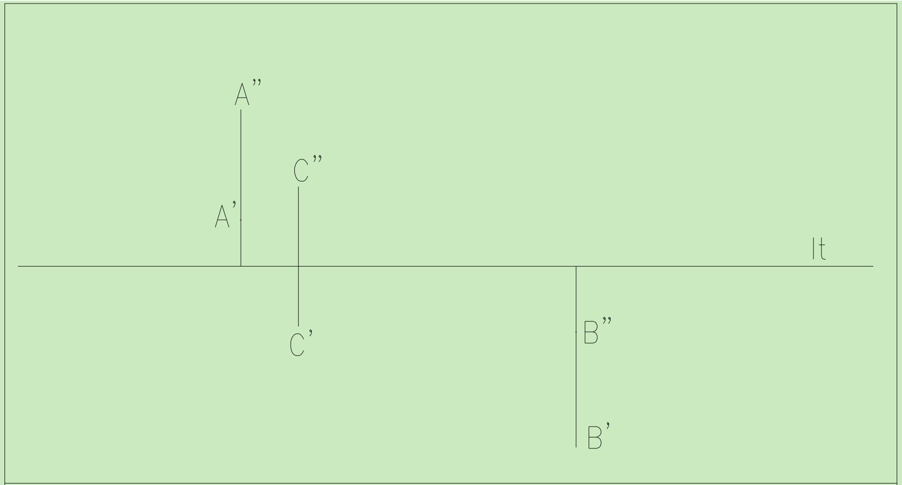
Le tracce T_{1a} e T_{1b} si collocano fuori del rettangolo grafico

Tema 20– Costruire e rappresentare $(\alpha \subset r) \perp (\beta \subset r)$

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO-PIANO

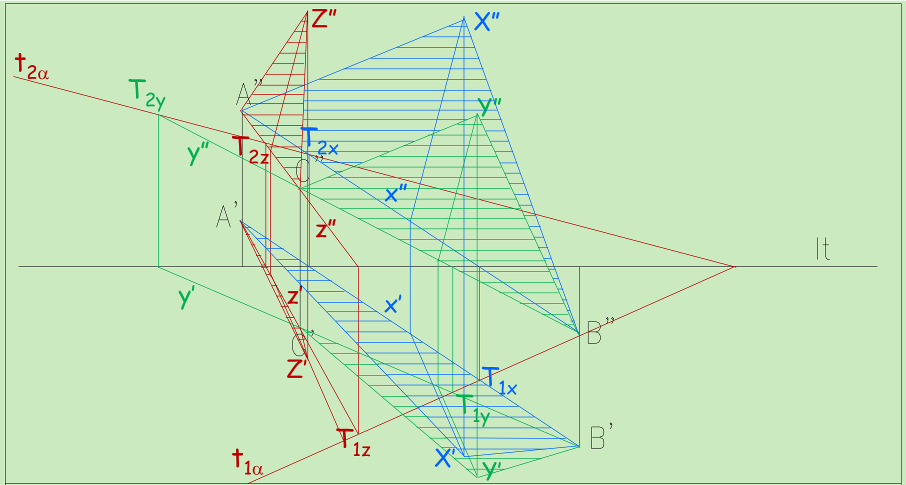
PROPOSTE DI TEMI GRAFICI SULLA CONDIZIONE DI ORTOGONALITA' TRA PIANI (3)

Esercizio

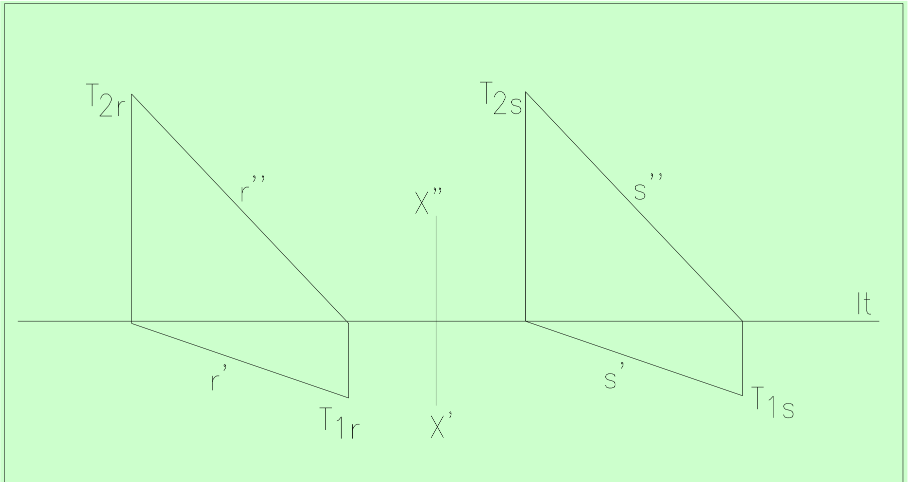


Tema 21–Rappresentare i triangoli isosceli $[(ABX),(BCY),(ACZ)]\perp\alpha\subset(ABC)$ dove X,Y,Z sono vertici opposti alle basi

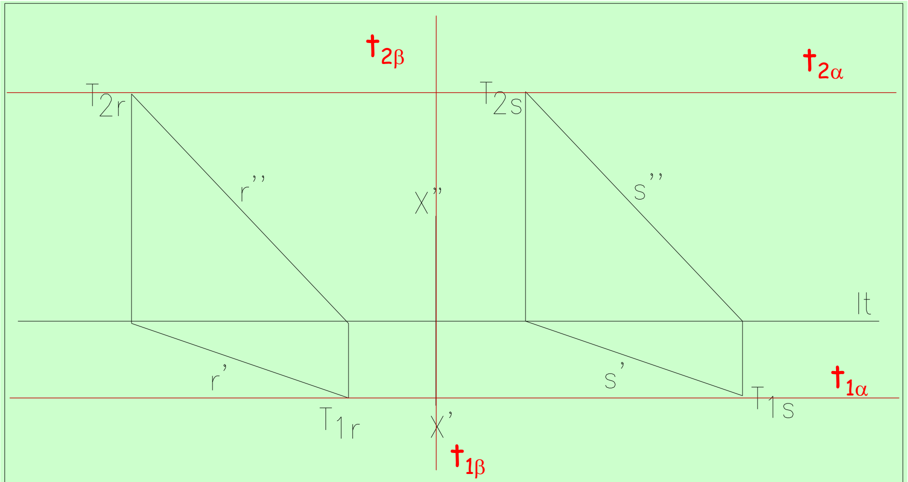
Risoluzione



Tema 21–Rappresentare i triangoli isosceli $[(ABX),(BCY),(ACZ)]\perp\alpha\subset(ABC)$ dove X,Y,Z sono vertici opposti alle basi



Tema 22– Costruire e rappresentare $(\beta\subset X)\perp\alpha\subset(r,s)$

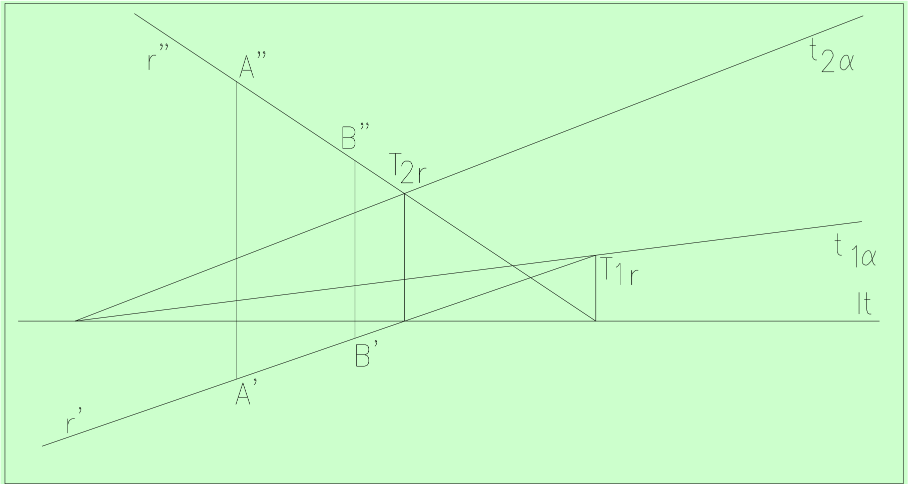


Tema 22– Costruire e rappresentare $(\beta\subset X)\perp\alpha\subset(r,s)$

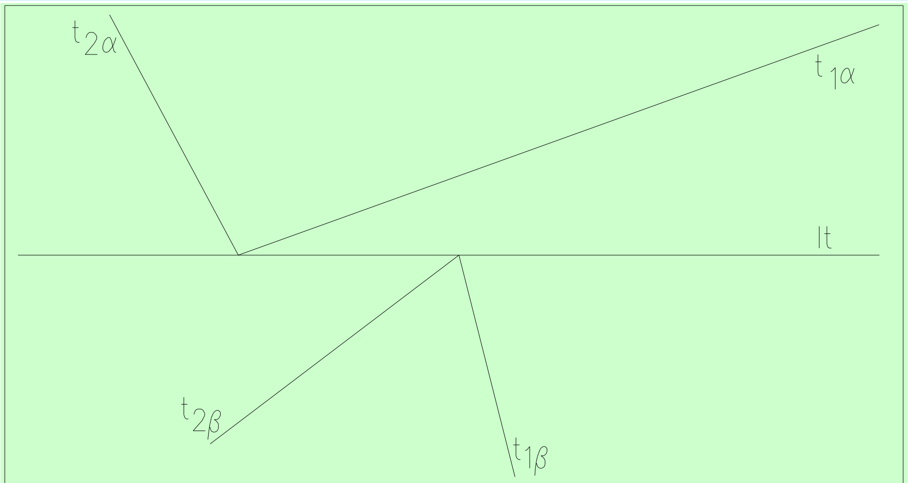
PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO-PIANO

PROPOSTE DI TEMI GRAFICI SULLA CONDIZIONE DI ORTOGONALITA' TRA PIANI (4)

Esercizio

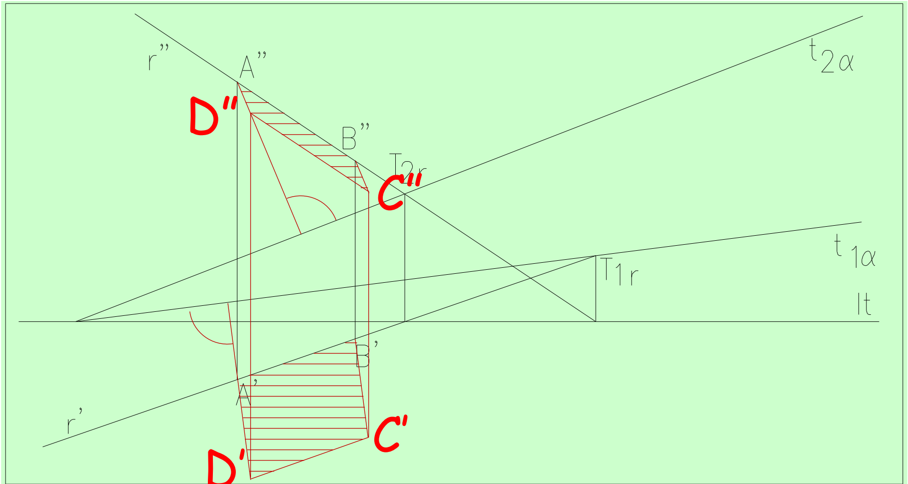


Tema 23– Dati i punti (A,B) costruire e rappresentare il parallelogramma (ABCD) ⊥ α

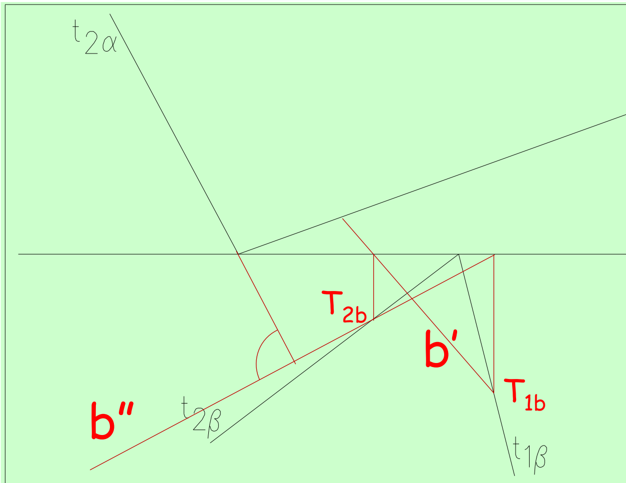


Tema 24– Verificare se $\alpha \perp \beta$

Risoluzione



Tema 23– Dati i punti (A,B) costruire e rappresentare il parallelogramma (ABCD) ⊥ α



I due piani risultano obliqui in quanto $\beta \subset b \angle \alpha$ perché $b'' \perp t_{2\alpha}$ ma $b' \angle t_{1\alpha}$

Tema 24– Verificare se $\alpha \perp \beta$

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO- PIANO
TEMI SCRITTI DA VOLGERE E SVILUPPARE IN FORMA DI ELABORATI GRAFICI (1)

1. Dati un piano $\alpha(\angle\pi^-_1\angle\pi^+_2)$ ed un punto $A\in\alpha$ definire e rappresentare un piano $(\beta\subset A)\perp\alpha$.

2. Dati i punti A(A'=4;A"=6), B(B'=6;B"=3) definire e rappresentare prima un piano $\alpha\subset(A,B)$ poi un secondo piano $\beta\subset(A,B)\perp\alpha$.

3. Dati i punti A(A'=1;A"=7), B(B'=-3;B"=3), C(C'=7;C"=4) costruire e rappresentare $\alpha\subset(A,B,C)$, $\beta\subset(A,B)\perp\alpha$, $\gamma\subset(B,C)\perp\alpha$, $\delta\subset(A,C)\perp\alpha$.

4. Dati i piani $\alpha(\angle\pi^+_1\angle\pi^+_2)\perp\beta(\angle\pi^+_1\angle\pi^+_2)$ costruire e rappresentare un triangolo qualunque avente un vertice $A\in\alpha$ e gli altri due vertici $(B,C)\in\beta$.

5. Date le rette $r(\angle\pi^+_1\angle\pi^+_2)//s(\angle\pi^+_1\angle\pi^+_2)$ costruire e rappresentare il piano $\alpha\subset(r, s)$ quindi per $(XY\in a)\perp(r, s)$ costruire e rappresentare un piano $\beta\perp\alpha$.

6. Siano dati i punti A(A'=3,A"=7), B(B'=7;B"=4), C(C'=1;C"=5). Sapendo che essi costituiscono una base di un prisma retto a base triangolare, definire e rappresentare le facce laterali dello stesso appartenenti ai piani $\beta\perp\alpha$, $\gamma\perp\alpha$, $\delta\perp\alpha$.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO- PIANO
TEMI SCRITTI DA VOLGERE E SVILUPPARE IN FORMA DI ELABORATI GRAFICI (2)

7. Dato il piano $\alpha(\angle\pi^+_1\angle\pi^+_2)$ ed i punti A(A'=3;A"=-4), B(B'=-3;B"=4) costruire e rappresentare i piani $(\beta\subset A)\perp\alpha$ e $(\gamma\subset B)\perp\alpha$ ponendo $\beta//\gamma$.

8. Dati i seguenti elementi descrittivi $a(T_{1a}=1;T_{2a}=5)$ costruire e rappresentare la retta a quindi due piani tali che siano $(\alpha\perp a)\perp(\beta\subset a)$.

9. Dati i punti A(A'=1;A"=6), B(B'=6;B"=1) costruire e rappresentare due rette $(a\subset A)//(b\subset B)$ quindi il piano $\alpha\subset(a,b)$. Infine individuare e rappresentare il piano $\beta\subset(A,B)\perp\alpha$. Dati i punti $(X,Y)\in r(\angle\pi\text{-}1\angle\pi\text{+}2)$ definire e rappresentare $\alpha\subset r$ quindi i piani $(\beta\subset X)\perp\alpha$; $(\gamma\subset Y)\perp\alpha$.

10. Dati i punti $(X,Y)\in r(\angle\pi\text{-}1\angle\pi\text{+}2)$ definire e rappresentare $\alpha\subset r$ quindi i piani $(\beta\subset X)\perp\alpha$; $(\gamma\subset Y)\perp\alpha$.

11. Date le rette $a(T_{1a}=\infty;T_{2a}=6)$ definire il piano $\alpha\subset(a,b)$ quindi per il punto X(X'=5;X"=5)$\notin\alpha$ costruire e rappresentare un piano $\beta\perp\alpha$.

12. Date le rette $a(T_{1a}=-\infty;T_{2a}=6)$, $b(T_{1b}=-\infty;\ T_{2b}=1)$ definire il piano $\alpha\subset(a,b)$ quindi per il punto Y(Y'=-1;Y"=-6)$\notin\alpha$ costruire e rappresentare un piano $\beta\perp\alpha.\alpha(\angle\pi^+_1\angle\pi^+_2)$

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: PIANO-PIANO
GRIGLIA DI VALUTAZIONE DEGLI ELABORATI GRAFICI

Si riporta, di seguito, una griglia utilizzata per la valutazione sia dei test che delle esercitazioni grafiche sviluppate sotto forma di elaborati. Si considerano tre parametri fondamentali:

1)Conoscenze teoriche 2)Capacità logiche 3)Competenze grafiche

VALUTAZIONE DELLE ESERCITAZIONI GRAFICHE

Ogni elaborato è costituito da quattro esercizi che vengono, singolarmente, valutati secondo la seguente griglia

Test Eserc.	Elementi della valutazione	Valutazioni			Punti
1	Conoscenze teoriche (Conoscenza dei concetti, delle regole, delle leggi)	0,00	0,50	1,00	2,50
	Capacità logiche (Capacità di trasporre conoscenze teoriche in elaborazioni grafiche)	0,00	0,50	1,00	
	Competenze grafiche (Precisione, chiarezza, leggibilità, essenzialità, didascalie,ecc.)	0,00	0,25	0,50	
2	Conoscenze teoriche (Conoscenza dei concetti, delle regole, delle leggi)	0,00	0,50	1,00	2,50
	Capacità logiche (Capacità di trasporre conoscenze teoriche in elaborazioni grafiche)	0,00	0,50	1,00	
	Competenze grafiche (Precisione, chiarezza, leggibilità, essenzialità, didascalie,ecc.)	0,00	0,25	0,50	
3	Conoscenze teoriche (Conoscenza dei concetti, delle regole, delle leggi)	0,00	0,50	1,00	2,50
	Capacità logiche (Capacità di trasporre conoscenze teoriche in elaborazioni grafiche)	0,00	0,50	1,00	
	Competenze grafiche (Precisione, chiarezza, leggibilità, essenzialità, didascalie,ecc.)	0,00	0,25	0,50	
4	Conoscenze teoriche (Conoscenza dei concetti, delle regole, delle leggi)	0,00	0,50	1,00	2,50
	Capacità logiche (Capacità di trasporre conoscenze teoriche in elaborazioni grafiche)	0,00	0,50	1,00	
	Competenze grafiche (Precisione, chiarezza, leggibilità, essenzialità, didascalie,ecc.)	0,00	0,25	0,50	
PUNTEGGIO TOTALE					10,00

Per maggiore completezza ed approfondimento degli argomenti si può consultare il seguente sito

http://www.webalice.it/eliofragassi