Geometria descrittiva dinamica

Indagine insiemistica sulla doppia proiezione ortogonale di Monge

Con questo learning object si indaga e approfondisce la relazione geometrico-descrittiva della legge di perpendicolarità o ortogonalità tra gli elementi geometrici uguali, cioè la legge di

PERPENDICOLARITA' TRA RETTE

Con questa ricerca si studiano e definiscono i rapporti ed i legami geometrico-descrittivi (esistenti o non) con riferimento all'aspetto insiemistico tra due enti uguali della geometria : **LA RETTA**

Il metodo descrittivo di riferimento è costituito dalla doppia proiezione ortogonale di Monge

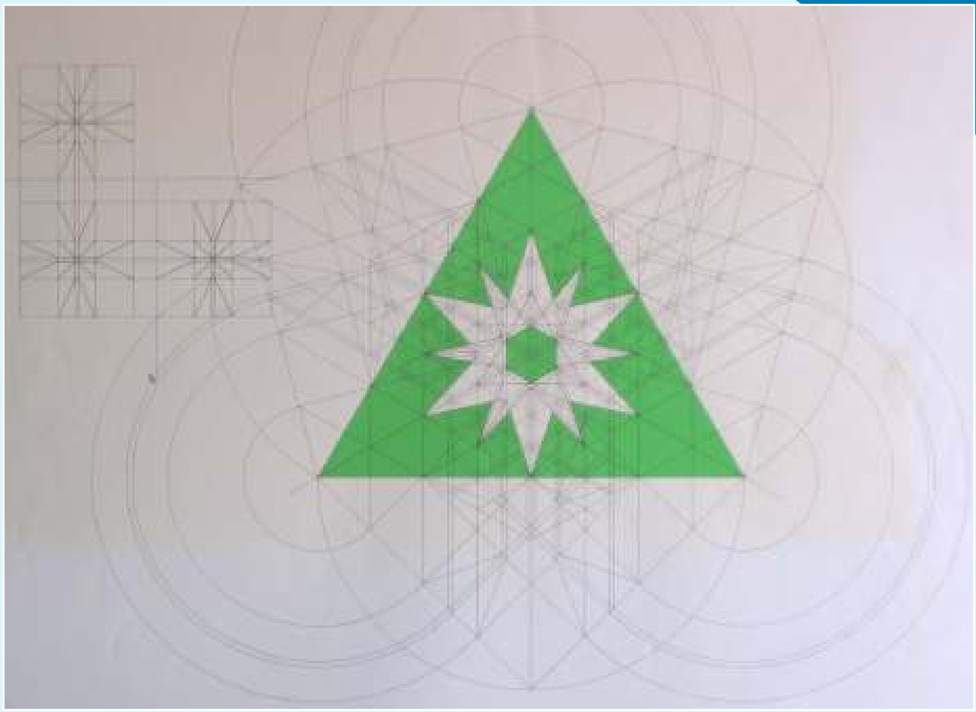
La conoscenza di questa legge ci permette di definire la presenza o meno di rapporti di perpendicolarità tra gli enti geometrici di un solido, di un oggetto, di un progetto inteso come attualizzazione del futuro, prima che esso si concretizzi. Pertanto è una legge geometrica di primaria importanza per tutti quelli che operano in senso progettuale e manipolano mentalmente gli enti geometrici che articolandosi nello spazio danno vita a forme finalizzate a definire e modellare lo spazio .

Geometria descrittiva dinamica

Indagine insiemistica sulla doppia proiezione ortogonale di Monge

LE LEGGI GEOMETRICHE

PERPENDICOLARITA' O ORTOGONALITA' TRA RETTE



Il disegno è stato eseguito nell'a. s. 1993/1994

da **Iolanda Iezzi** della classe 3°B dello **Istituto Statale d'Arte "G. Mazara" di Sulmona**

per la materia :"**Disegno geometrico**"

Insegnante: Prof. Elio Fragassi

La revisione delle formalizzazioni è stata curata dalla dott.ssa **Gabriella Mostacci**

Autore Prof. Elio Fragassi

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA

INDAGINE ESPLICATIVA E DEDUTTIVA

CONSIDERAZIONI E NOTE INTRODUTTIVE (1)

Ricordiamo, nuovamente, che gli elementi geometrico-descrittivi mediante i quali rappresentiamo la retta sono le "**tracce**" e le "**proiezioni**".

Poiché le tracce si caratterizzano, "geometricamente" come punti, per questa loro caratteristica non sono idonei a definire le leggi descrittive della ortogonalità.

Restano, quindi, le sole proiezioni che si caratterizzano "geometricamente" come rette, ma, fisicamente come elementi "virtuali"

Per questa caratterizzazione "fisica" non può, assolutamente, affermarsi che se le proiezioni di due rette sono tra loro ortogonali, tali sono, anche, le rette reali.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
CONSIDERAZIONI E NOTE INTRODUTTIVE (2)

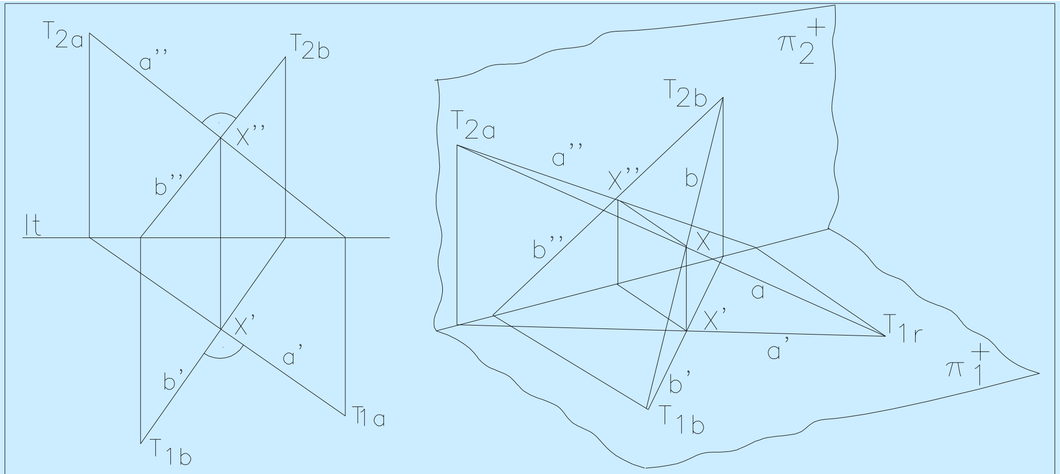


Fig.11 Ortogonalità apparente fra le proiezioni di due rette

Difatti, come evidenziato nella figura 11, pur se le proiezioni a' e b' e le proiezioni a'' e b'' sono tra loro ortogonali, ciò non è affatto vero nella situazione reale, cioè non è vero che $a \perp b$

Il disegno spaziale della figura 11 non chiarisce (per sua natura) ciò completamente ed esaurientemente, pertanto si consiglia di effettuare una verifica sperimentale in concreto nel diedro per constatare la veridicità dell'assunto che ritiene assolutamente insufficiente l'ortogonalità delle proiezioni di due rette per poter asserire l'esistenza dell'ortogonalità tra le rette reali.

Infatti, poiché la condizione geometrica in discussione impone e/o verifica l'esistenza di un rapporto geometrico e descrittivo concreto, continuo e costante tra elementi reali, è necessario che si verifichi l'ortogonalità tra questi e non tra le corrispondenti proiezioni che sono rappresentazioni virtuali o immagini degli elementi reali

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
CONSIDERAZIONI E NOTE INTRODUTTIVE (3)

Pertanto, salvo casi di posizioni particolari (rette appartenenti a piani orizzontali e/o frontali) l'ortogonalità tra le proiezioni di due rette ci porta ad affermare che le rette reali sono oblique, **quindi si ha la seguente espressione sintetica.**

$a' \perp b'$

$a \angle b$

$a'' \perp b''$

Salvo casi di posizioni particolari

Prima di continuare la ricerca di norme utili per stabilire le leggi di ortogonalità tra due o più rette, analizziamo alcuni aspetti dinamici della retta nello spazio.

Data una retta nello spazio, ricordiamo, anzitutto, l'esistenza dei seguenti presupposti.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
CONSIDERAZIONI E NOTE INTRODUTTIVE (4)

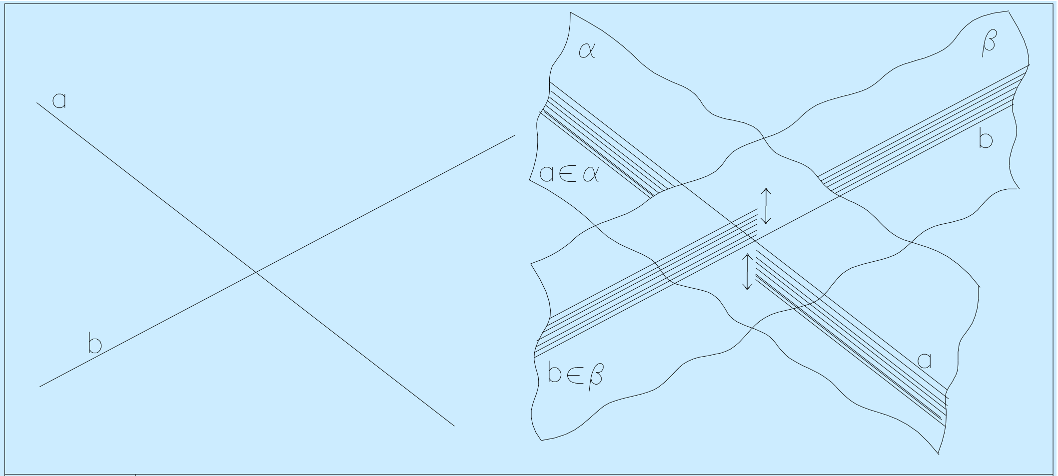


Fig.12 Dalla retta al piano rigato

a) un piano può essere riguardato come "**piano rigato**", costituito cioè dalle infinite posizioni di una retta che si muove (parallelamente a se stessa) secondo una direzione prefissata (fig.12)

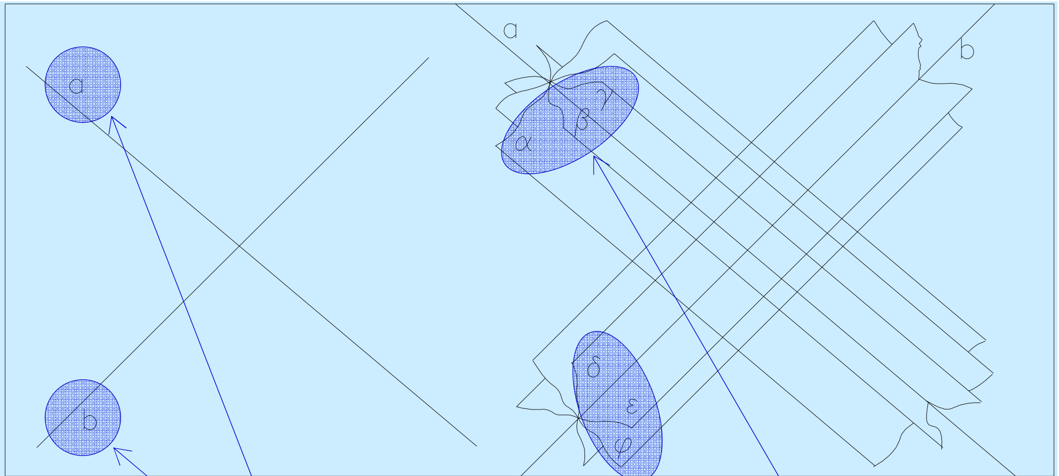


Fig.13 Dalla retta alla stella di piani

Rette sostegni dei fasci

Fasci di rette

b) per una retta possiamo condurre un fascio di piani (fig.13).
Nel caso della figura 13, infatti, per la retta a, detta sostegno del fascio, sono stati condotti i piani α,β,γ; mentre i piani $\delta,\varepsilon,\varphi$ costituiscono il fascio che ha come sostegno la retta b.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
CONSIDERAZIONI E NOTE INTRODUTTIVE (5)

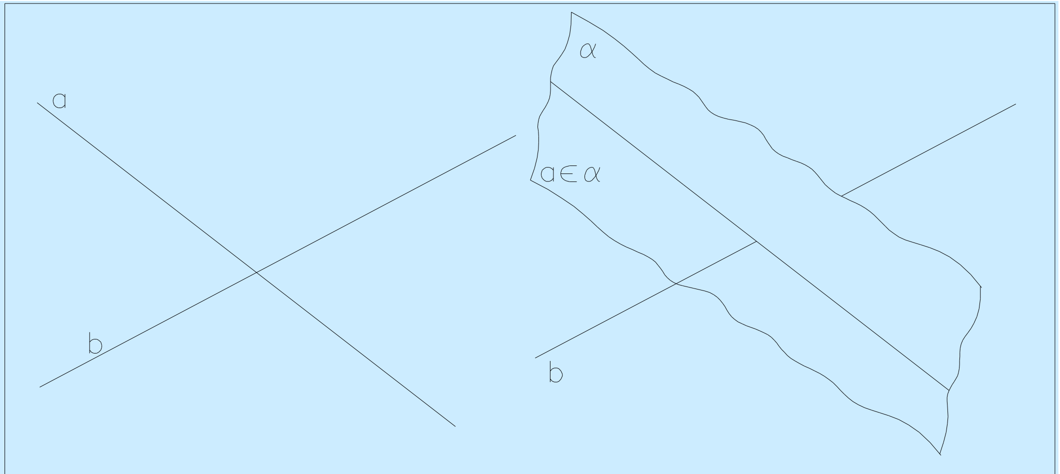


Fig.14 Determinazione degli elementi geometrici (1 caso)

Allora, date le rette a e b, ognuna di esse può essere riguardata come retta di un "piano rigato" (Fig.12) e/o sostegno di un fascio di piani (Fig.13) per cui è possibile condurre, ugualmente, per a o per b un piano che contiene una delle due rette.

Nella figura 14 si è scelto di fare in modo che la retta a fosse appartenente al piano α;

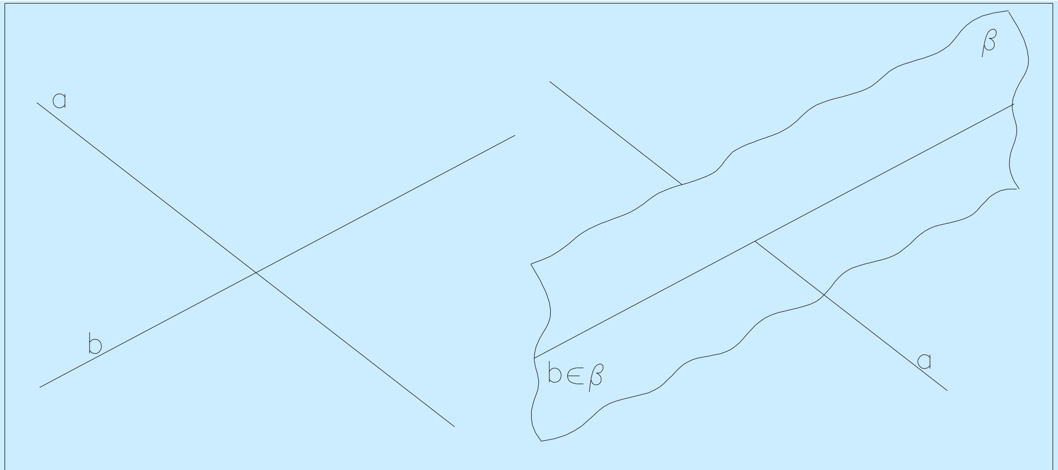


Fig.15 Determinazione degli elementi geometrici (2 caso)

mentre nella figura 15 si è scelto di fare in modo che la retta b appartenesse al piano β.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
CONSIDERAZIONI E NOTE INTRODUTTIVE (6)

Così operando si torna a considerare i due elementi geometrici "**piano**" e "**retta**", con le relative condizioni di ortogonalità già definite ma comprendendo, in più, le leggi dell'appartenenza e le reciproche leggi dell'inclusione o della contenenza. In questo modo è possibile specificare la condizione descrittiva dell'ortogonalità tra rette come di seguito.

Due rette sono, tra loro, in rapporto geometrico di ortogonalità se, e solo se, per una di esse si può condurre un piano che la contiene, ortogonale all'altra.

O, reciprocamente

Due rette sono, tra loro, in rapporto geometrico di ortogonalità se, e solo se, una di esse appartiene ad un piano ortogonale all'altra.

Stando quanto esposto sopra, date due rette a,b si può operare, ad esempio, mediante la retta b ed il piano α contenente la retta a (figura 14) oppure tramite la retta a ed il piano β che contiene la retta b (figura 15).

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
IMPOSTAZIONE DEI PROCEDIMENTI DI VERIFICA (1)

Acquisite le considerazioni introduttive, l'ortogonalità in discussione può essere verificata sviluppando le condizioni geometrico - descrittive espresse dalla seguente simbologia insiemistica .

$$a \perp \beta \subset b \Rightarrow a \perp b$$

vedi figura 15

oppure tramite le reciproche condizioni di appartenenza

$$a \in \alpha \perp b \Rightarrow a \perp b$$

vedi figura 14

Le espressioni sintetiche, di sopra, possono essere esplicitate come di seguito ove i simboli assumono i significati già noti e rintracciabili nelle tabelle poste alla fine del fascicolo.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI:RETTA-RETTA
IMPOSTAZIONE DEI PROCEDIMENTI DI VERIFICA (2)

$a' \perp t_{1\beta}$

$a'' \perp t_{2\beta}$

$a \perp \beta$

$t_{1\beta} \subset T_{1b}$

$t_{2\beta} \subset T_{2b}$

$\beta \subset b$

$a \perp \beta \subset b$

$a \perp b$

Oppure, reciprocamente, mediante le condizioni di appartenenza

$T_{1a} \in t_{1\alpha}$

$T_{2a} \in t_{2\alpha}$

$a \in \alpha$

$t_{1\alpha} \perp b'$

$T_{2\alpha} \perp b''$

$\alpha \perp b$

$a \in \alpha \perp b$

$a \perp b$

Data la biunivocità del legame, si ha che:

$$a \perp b \Leftrightarrow b \perp a$$

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
IMPOSTAZIONE DEI PROCEDIMENTI DI VERIFICA (3)

Per cui la condizione di ortogonalità può essere espressa anche dalla seguente formalizzazione insiemistica mediante il concetto di inclusione

$$b \perp \alpha \subset a \Rightarrow b \perp a$$

vedi figura 14

oppure mediante le reciproche condizioni di appartenenza

$$b \in \alpha \perp a \Rightarrow b \perp a$$

vedi figura 15

Le espressioni sintetiche, di sopra, possono essere esplicitate come di seguito ove i simboli assumono i significati già noti e rintracciabili nelle tabelle del fascicolo

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
IMPOSTAZIONE DEI PROCEDIMENTI DI VERIFICA (4)

Oppure, reciprocamente, mediante le condizioni di appartenenza

$b' \perp t_{1\alpha}$

$b \perp \alpha$

$b'' \perp t_{2\alpha}$

$t_{1\alpha} \subset T_{1a}$

$\alpha \subset a$

$t_{2\alpha} \subset T_{2a}$

$b \perp \alpha \subset a$

$b \perp a$

$T_{1b} \in t_{1\beta}$

$b \in \beta$

$T_{2b} \in t_{2\beta}$

$t_{1\beta} \perp a'$

$\beta \perp a$

$t_{2\beta} \perp a''$

$b \in \beta \perp a$

$b \perp a$

Data la biunivocità del legame, si ha che:

$$b \perp a \Leftrightarrow a \perp b$$

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
INDAGINE ESPLICATIVA (1)

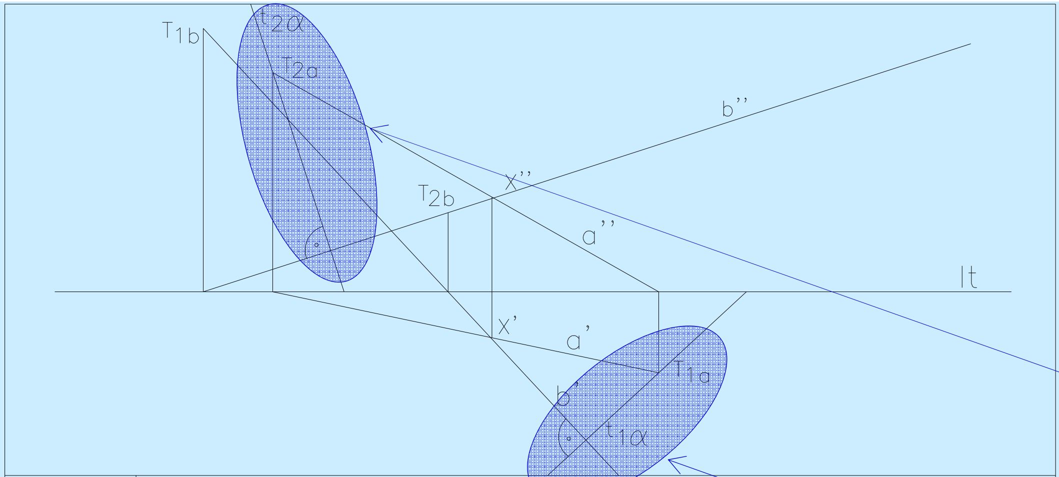


Fig.16 Ortogonalità tra rette nel primo diedro (verifica)

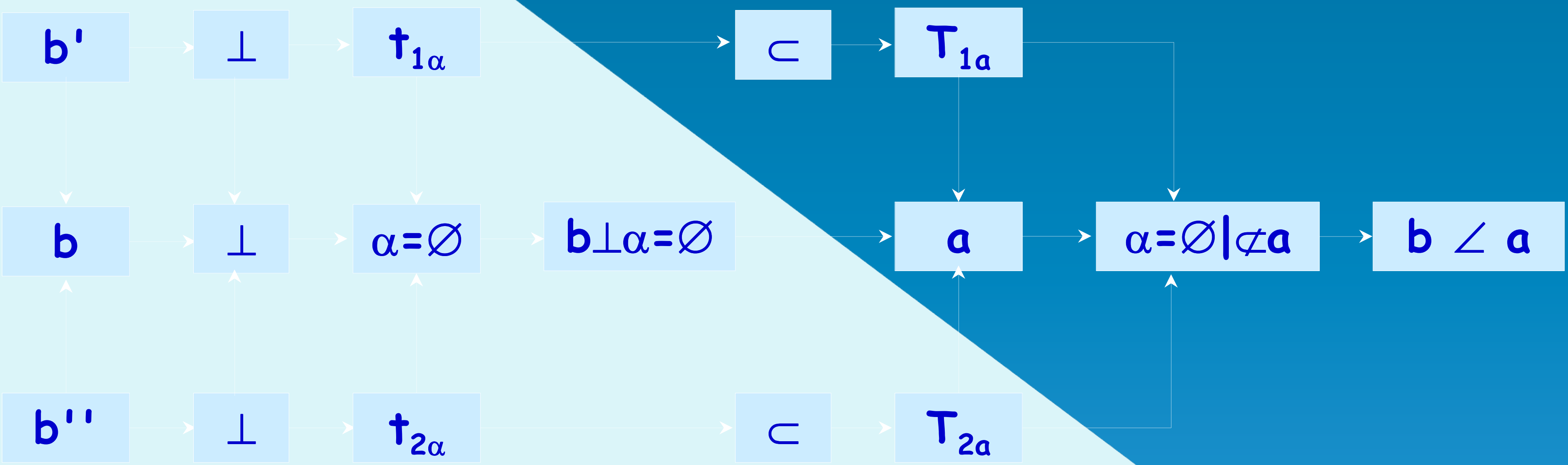
Sulla base delle considerazioni sviluppate al punto precedente e ricordando che la condizione può essere imposta o verificata, si sviluppano le seguenti indagini esplicative grafiche con riferimento alla figura 16.

Assegnate le rette a(a',a'') e b(b',b''), si conduce per la retta a un piano $\alpha \perp$ b, per cui sarà $T_{1a} \in t_{1\alpha} \perp b'$ ed anche $T_{2a} \in t_{2\alpha} \perp b''$.

Precisate le operazioni descritte, se le tracce $t_{1\alpha}$ e $t_{2\alpha}$, predisposte perpendicolarmente alle proiezioni b' e b'' della retta b, definiscono il piano α, ne discenderà che le due rette a e b saranno, a loro volta, perpendicolari, altrimenti (come nell'esempio di sopra), poiché le tracce del piano $t_{1\alpha}$ e $t_{2\alpha}$ non definiscono la rappresentazione descrittiva del piano α, che vuole le due tracce incidenti nello stesso punto sulla linea di terra (si ricorda che la lt è il luogo geometrico dei punti uniti), si può asserire che, in questo caso, le due rette a e b sono in rapporto di obliquità. Dalla disposizione delle tracce del piano α si evince che il piano è un insieme vuoto (quindi non esiste) e come tale non può contenere la retta a.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
INDAGINE ESPLICATIVA (2)

I passaggi di verifica possono essere espressi in modo sintetico mediante la seguente simbologia



Le stesse operazioni di verifica possono eseguirsi mediante la retta b, così come evidenziato, graficamente, nella figura 17

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
INDAGINE ESPLICATIVA (3)

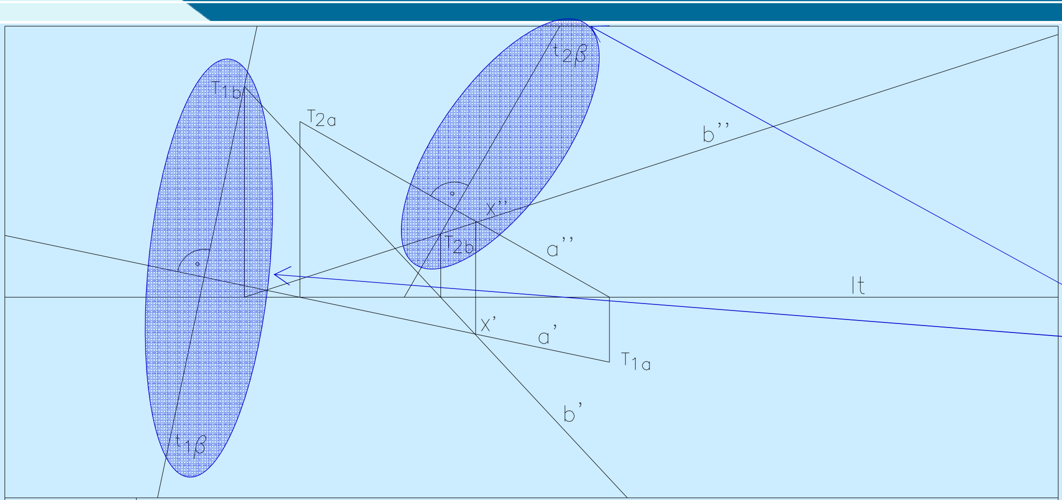


Fig.17 Ortogonalità tra rette nel primo diedro (2a verifica)

Pertanto è necessario definire per la retta b un piano $\beta \perp a$, quindi sarà,per le conosciute condizioni di ortogonalità, $T_{1b} \in t_{1\beta} \perp a'$ ed anche $T_{2b} \in t_{2\beta} \perp a''$

Anche in questo caso resta dimostrato che le tracce $t_{1\beta}$ e $t_{2\beta}$ non concorrono alla descrizione grafica dell'immagine descrittiva del piano β.

Le due tracce, infatti, che non si intersecano sulla linea di terra determinano un insieme vuoto (quindi non un piano) che non può contenere la retta b, quindi esse non sono tracce di un piano ma due rette qualsiasi diverse e distinte.

Si convalida, pertanto, il risultato precedente per cui si ha che

$$a \angle b$$

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
INDAGINE ESPLICATIVA (4)

Anche in questo caso le operazioni di verifica possono essere espresse in modo sintetico mediante la seguente simbologia

$$
\begin{tikzcd}
a' \arrow[r] \arrow[d] & \perp \arrow[r] \arrow[d] & t_{1\beta} \arrow[r] \arrow[d] & \subset \arrow[r] & T_{1b} \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
a \arrow[r] & \perp \arrow[r] & \beta=\varnothing \arrow[r] & a\perp\beta=\varnothing \arrow[r] & b \arrow[r] & \beta=\varnothing \,|\, \not\subset b \arrow[r] & a \angle b \\
a'' \arrow[r] \arrow[u] & \perp \arrow[r] \arrow[u] & t_{2\beta} \arrow[r] \arrow[u] & \subset \arrow[r] & T_{2b} \arrow[u] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Inoltre può accadere che si verifichi, alla fine della costruzione grafica, quanto di seguito (Fig.18)

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
INDAGINE ESPLICATIVA (5)

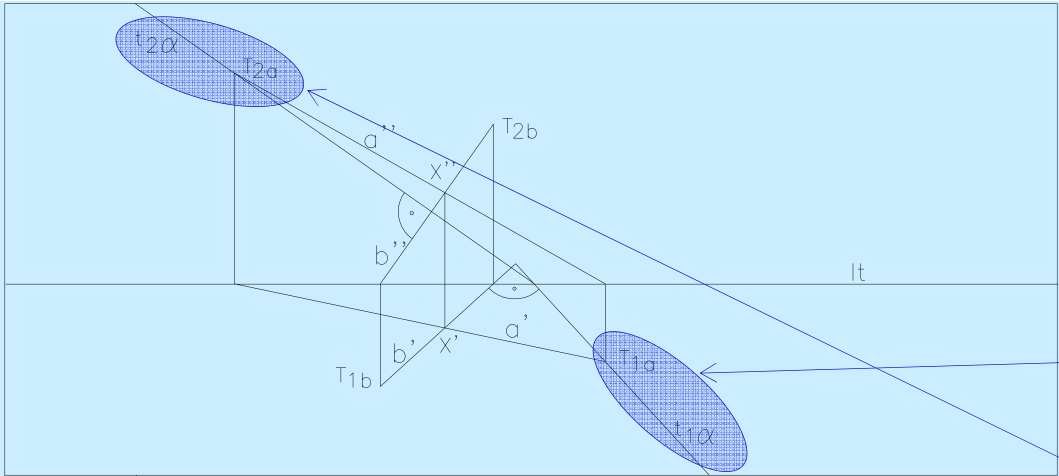


Fig.18 Ortogonalità tra rette nel primo diedro (1 modalità)

Date le rette a(a',a") e b(b',b"), si conduce per la retta a un piano $\alpha \perp b$

Data la prescrizione di questa condizione geometrica, sarà

$\mathbf{T_{1a} \in t_{1\alpha} \perp b'}$ ed anche

$\mathbf{T_{2a} \in t_{2\alpha} \perp b''}$

Poiché le tracce $t_{1\alpha}$ e $t_{2\alpha}$ predisposte perpendicolarmente alle proiezioni b' e b", definiscono un piano α che contiene la retta a, allora, si può asserire che le due rette a e b sono perpendicolari (come nell'esempio di figura 18) poiché le tracce del piano α sono perpendicolari alle rispettive proiezioni della retta b e quindi si è dimostrato e verificato il completo riscontro delle condizioni geometriche come espresso dalla formalizzazione sintetica $b \perp \alpha \subset a \Rightarrow b \perp a$ esplicitata nella precedente pagina 13.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
INDAGINE ESPLICATIVA (6)

Le operazioni di verifica, esposte sopra, possono essere espresse in maniera sintetica mediante la simbologia seguente dove lo sviluppo dei passaggi di verifica, posto al centro dello schema operativo, evidenzia la completa congruenza delle leggi geometriche ed insiemistiche nella verifica delle condizioni descrittive tra gli elementi geometrici in gioco

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{b'} \arrow[r] \arrow[d] & \perp \arrow[r] \arrow[d] & t_{1\alpha} \arrow[rr] \arrow[d] & & \subset \arrow[r] \arrow[d] & T_{1a} \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
\mathbf{b} \arrow[r] & \perp \arrow[r] & \alpha \arrow[r] & \mathbf{b}\perp\alpha \arrow[r] & \subset \arrow[r] & \mathbf{a} \arrow[r] & \mathbf{b}\perp\alpha\subset\mathbf{a} \arrow[r] & \mathbf{b} \perp \mathbf{a} \\
\mathbf{b''} \arrow[r] \arrow[u] & \perp \arrow[r] \arrow[u] & t_{2\alpha} \arrow[rr] \arrow[u] & & \subset \arrow[r] \arrow[u] & T_{2a} \arrow[u] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Data la biunivocità della condizione tra i due elementi, come espresso dalla relazione **a ⊥ b ⇔ b ⊥ a**, le stesse operazioni di verifica possono svilupparsi mediante la retta b.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
INDAGINE ESPLICATIVA (7)

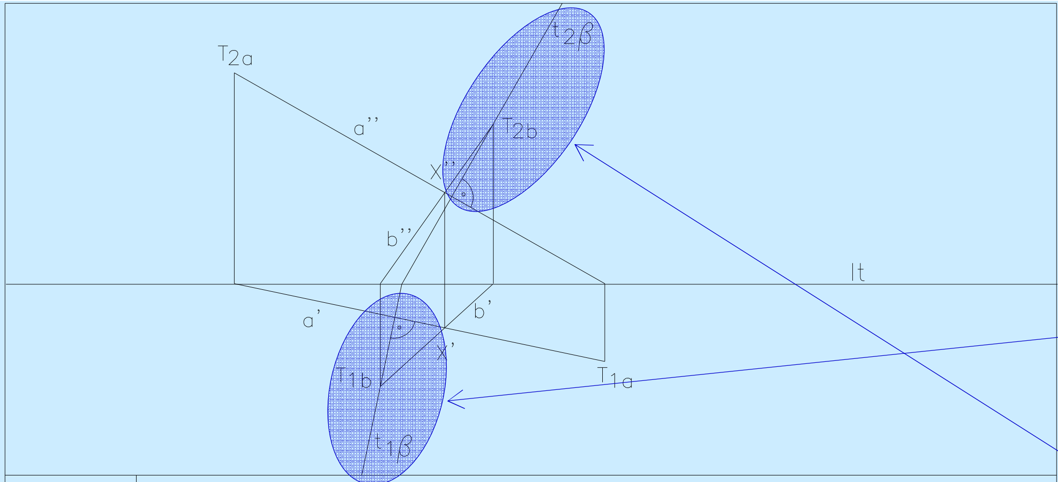


Fig.19 Ortogonalità tra rette nel primo diedro (2 modalità)

Pertanto definiamo anzitutto un piano $\beta \perp a$, perciò sarà

$T_{1b} \in t_{1\beta} \perp a'$ ed anche

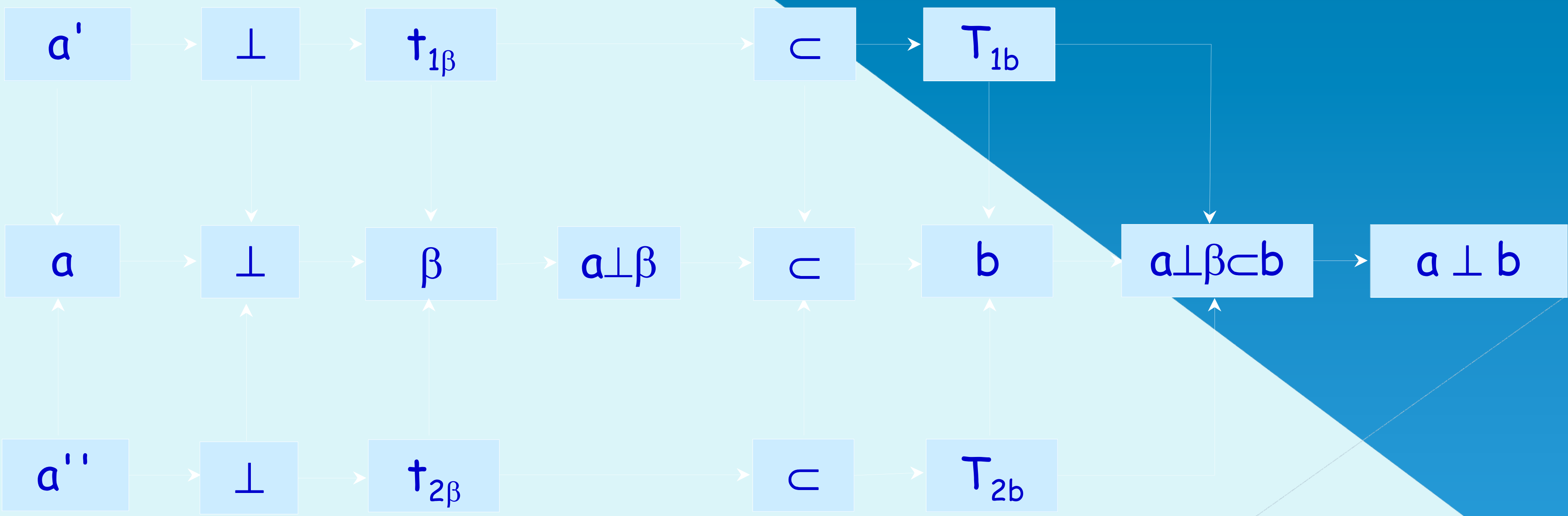
$T_{2b} \in t_{2\beta} \perp a''$

Come si evince dalla grafica dello stesso disegno di figura 19 le tracce $t_{1\beta}$ e $t_{2\beta}$ definiscono gli elementi geometrico - rappresentativi del piano β che contiene la retta b. Inoltre il piano $\beta \subset b$ ed ha le tracce perpendicolari alle proiezioni della retta a.

Stante, quindi, contemporaneamente le condizioni di appartenenza (o contenenza o inclusione) tra il piano β e la retta b, e le condizioni di ortogonalità tra il piano β e la retta a, possiamo asserire, senza dubbio, che le due rette a e b sono tra loro perpendicolari e quindi verificano la formalizzazione seguente: $a \perp \beta \subset b \Rightarrow a \perp b$ esplicitata come alla pagina 11.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
INDAGINE ESPLICATIVA (8)

Anche in questo caso le operazioni di verifica possono essere espresse in maniera sintetica mediante la simbologia seguente dove lo sviluppo dei passaggi di verifica, posto al centro dello schema operativo, evidenzia la completa congruenza delle leggi geometriche ed insiemistiche nella verifica delle condizioni descrittive tra gli elementi geometrici in gioco.



PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
INDAGINE ESPLICATIVA (9)

Data la reciprocità esistente tra le condizioni di appartenenza e quelle di contenenza o inclusione, è solo il caso di accennare che le stesse operazioni di verifica sviluppate per le formalizzazioni di pagina 11 e di pagina 13 sulla base delle condizioni ci contenenza o inclusione, possono essere sviluppate con le stesse operatività per le reciproche condizioni di appartenenza così come esplicitato nelle formalizzazioni esplicitate in pagina 11 e pagina 13.

A conclusione di queste operazioni di verifica, possiamo generalizzare la legge geometrica in discussione, ed esporre la seguente definizione

Date le proiezioni di due rette distinte, se per una di esse si può condurre un piano perpendicolare all'altra, allora, e solo allora si può asserire che le rette reali sono tra loro in rapporto di ortogonalità

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
PROCEDURA APPLICATIVA O IMPOSITIVA (1)

Se le condizioni devono essere imposte, nel corso dello sviluppo di un elaborato grafico, si opera come di seguito.

Stante la definizione assunta, data una retta, per determinarne una ortogonale si sviluppano i seguenti passaggi (Fig.20)

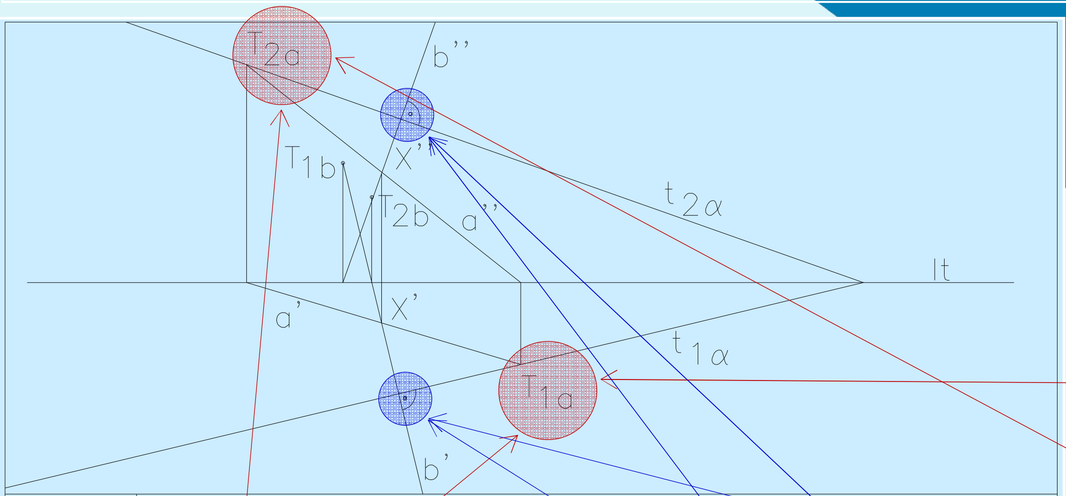


Fig.20 Ortogonalità tra rette nel primo diedro (imposizione)

Data una retta $a:(T_{1a},T_{2a},a',a'')$ si costruisce un piano α in modo che sia $\alpha \subset a$, per cui sarà $t_{1\alpha} \subset T_{1a}$ e $t_{2\alpha} \subset T_{2a}$ quindi per un punto $X \in a$ si costruisce la retta $b \subset X$ in modo tale che sia $b' \perp t_{1\alpha}$ e $b'' \perp t_{2\alpha}$

Legame di appartenenza

Legame di perpendicolarità

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
PROCEDURA APPLICATIVA O IMPOSITIVA (2)

In modo sintetico la condizione sarà espressa come di seguito

$b \perp a$ → $b \perp \alpha \subset a$

→ $b' \perp t_{1\alpha}$
$b'' \perp t_{2\alpha}$

→ $t_{1\alpha} \subset T_{1a}$
$t_{2\alpha} \subset T_{2a}$

Pertanto, data una retta a, la retta b sarà perpendicolare alla retta data se, e solo se, descrittivamente le proiezioni della retta b saranno perpendicolari alle tracce del piano α che contiene, a sua volta, la retta data a.

E' implicito che le due rette a, b possono essere incidenti; quindi complanari o sghembe cioè né complanari, né incidenti, né parallele ma ortogonali nello spazio.

Data la reciprocità dei legami tra gli elementi geometrici, come espresso dalla seguente formalizzazione

$$\mathbf{b \perp a \Leftrightarrow a \perp b}$$

se viene data una retta b, la retta a sarà perpendicolare a questa se, e solo se, la retta a sarà perpendicolare al piano β che contiene la retta b.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
PROCEDURA APPLICATIVA O IMPOSITIVA (3)

Espressa in maniera sintetica, ed in forma insiemistico - descrittiva, la legge assume la seguente formalizzazione.

$$a \perp b \rightarrow a \perp \beta \subset b$$

$$a' \perp t_{1\beta}$$
$$a'' \perp t_{2\beta}$$

$$t_{1\beta} \subset T_{1b}$$
$$t_{2\beta} \subset T_{2b}$$

Le stesse regole, espresse mediante la condizione di appartenenza, assumono la formalizzazione seguente

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
PROCEDURA APPLICATIVA O IMPOSITIVA (4)

$a \perp b$ → $a \in \alpha \perp b$

$$\underbrace{a \in \alpha \perp b}_{} \rightarrow \begin{cases} T_{1a} \in t_{1\alpha} \\ T_{2a} \in t_{2\alpha} \end{cases} \qquad \begin{cases} t_{1\alpha} \perp b' \\ t_{2\alpha} \perp b'' \end{cases}$$

E biunivocamente

$b \perp a$ → $b \in \beta \perp a$

$$\underbrace{b \in \beta \perp a}_{} \rightarrow \begin{cases} T_{1b} \in t_{1\beta} \\ T_{2b} \in t_{2\beta} \end{cases} \qquad \begin{cases} t_{1\beta} \perp a' \\ t_{2\beta} \perp a'' \end{cases}$$

Da quanto sopra, la condizione geometrico – descrittiva generale dell'ortogonalità tra due rette può così essere enunciata

Data una retta, per definirne un'altra, in rapporto geometrico di ortogonalità, è necessario che questa abbia le proiezioni ortogonali alle tracce di un piano che contiene la retta data

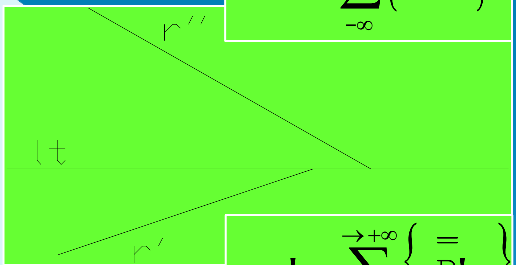
PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
QUADRO SINOTTICO DELLA CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITA' TRA RETTE

CARATTERISTICHE DEGLI ELEMENTI GEOMETRICI					
Elemento geometrico	Didascalia elemento	Didascalia elemento rappresentativo	Nomenclatura dell'elemento rappresentativo	Definizione geometrica elemento rappresentativo	Definizione fisica dell'elemento rapprsentativo
Retta	r	T_{1r}	1ª traccia	Punto	Reale
		T_{2r}	2ª traccia	Punto	Reale
		r'	1ª proiezione o 1ª immagine	Retta	Virtuale
		r''	2ª proiezione o 2ª immagine	Retta	Virtuale
Retta	s	T_{1s}	1ª traccia	Punto	Reale
		T_{2s}	2ª traccia	Punto	Reale
		s'	1ª proiezione o 1ª immagine	Retta	Virtuale
		s''	2ª proiezione o 2ª immagine	Retta	Virtuale

PERPENDICOLARITA' TRA RETTE

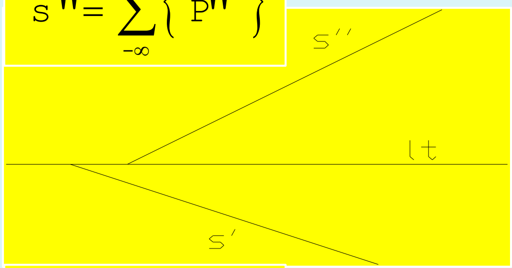
Definizione grafica degli elementi geometrici

$$r'' = \sum_{-\infty}^{\to +\infty} \left\{ \overset{=}{P''} \right\}$$



$$r' = \sum_{-\infty}^{\to +\infty} \left\{ \overset{=}{P'} \right\}$$

$$s'' = \sum_{-\infty}^{\to +\infty} \left\{ \overset{=}{P''} \right\}$$



$$s' = \sum_{-\infty}^{\to +\infty} \left\{ \overset{=}{P'} \right\}$$

Relazione insiemistica sintetica delle leggi della perpendicolarità tra rette

Formalizzazione esplicativa

$r \perp \beta$, $\beta \subset s$ → $r \perp \beta \subset s$ → $r \perp s$

biunivocamente

$s \perp \alpha$, $\alpha \subset r$ → $s \perp \alpha \subset r$ → $s \perp r$

Formalizzazione applicativa

$s \perp r$ → $s \perp \alpha \subset r$ → $s \perp \alpha$, $\alpha \subset r$

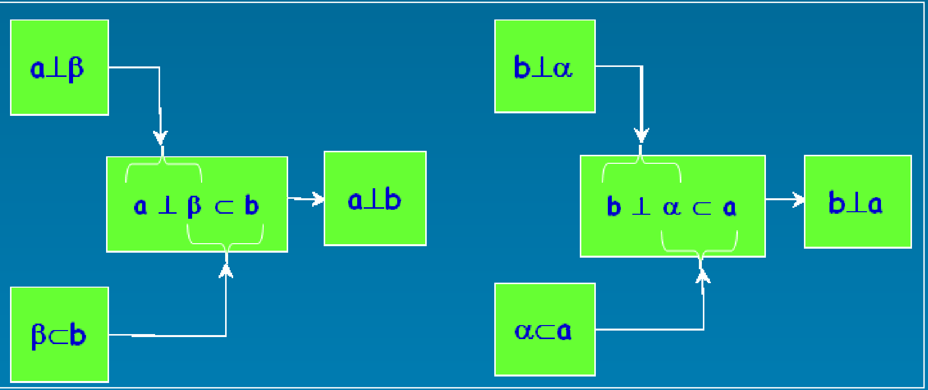
biunivocamente

$r \perp s$ → $r \perp \alpha \subset s$ → $r \perp \alpha$, $\alpha \subset s$

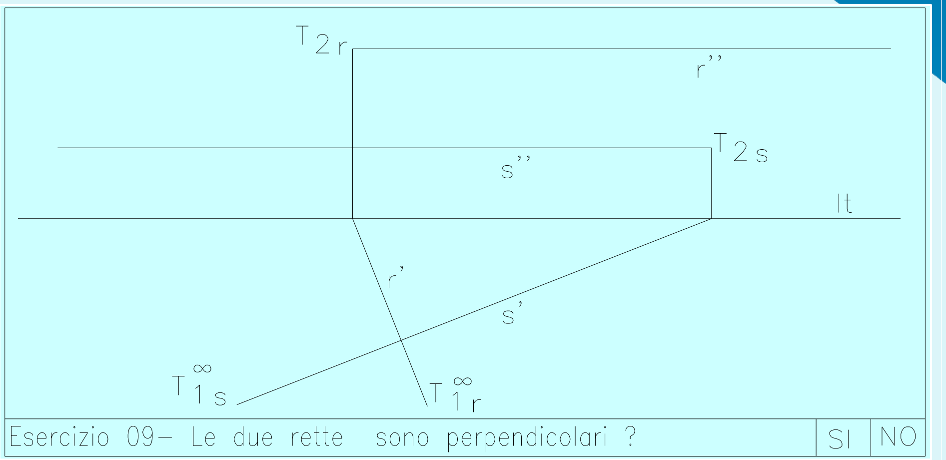
PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA ESPLICATIVA (1)

Seguono alcune esemplificazioni grafiche relative all'aspetto esplicativo della perpendicolarità tra rette di diversa tipologia, variamente collocate nello spazio dei diedri.

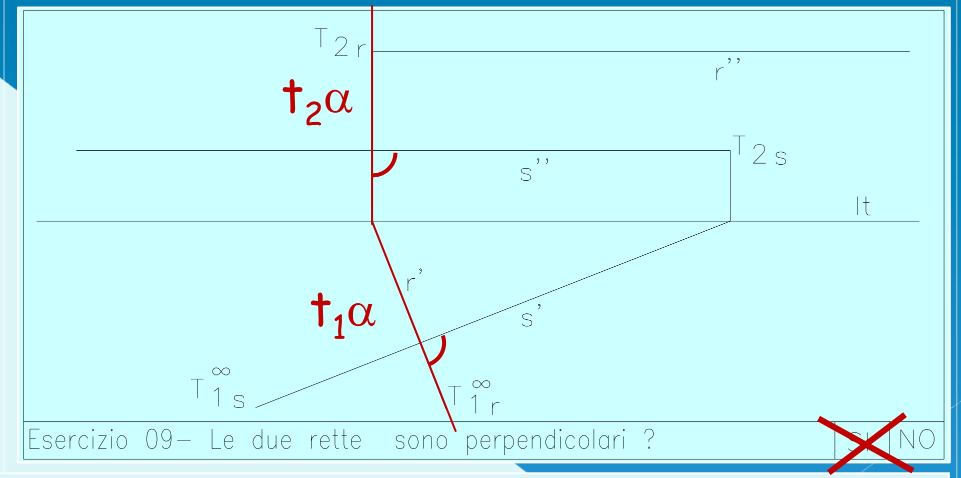
Date le seguenti formalizzazioni esplicative delle leggi di perpendicolarità, risolvere i grafici di seguito



Dato



Risultato

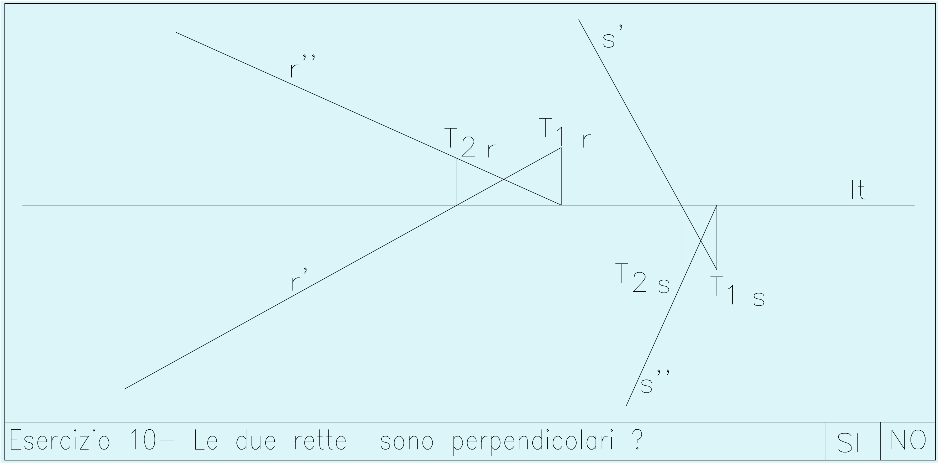


Spiegazione

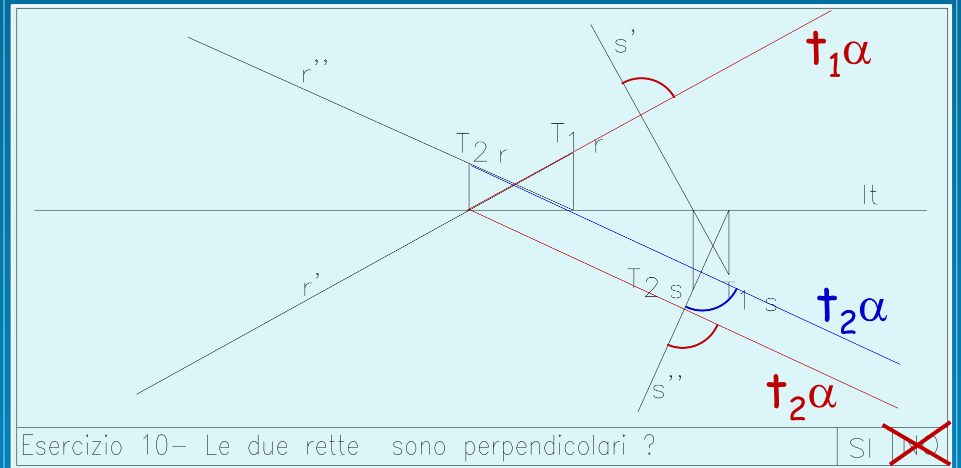
Si costruiscono le tracce del piano $\alpha(t_1\alpha; t_2\alpha)$ contenenti le tracce della retta $r(T_1r \in t_1\alpha)$, $(T_2r \in t_2\alpha)$ in relazione di perpendicolarità alle proiezioni della retta s(s';s"). Poiché la retta s è perpendicolare al piano α si può asserire che le due rette sono in relazione di ortogonalità: cioè che $(r \perp s)$.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA ESPLICATIVA (2)

Dato



Risultato



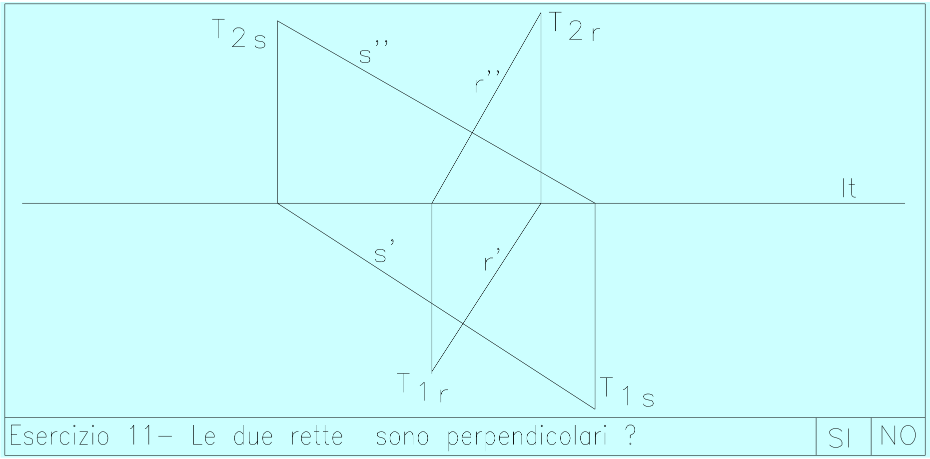
Spiegazione

Costruita la ($t_1\alpha \subset T_1r$) $\perp$ s' si definisce la traccia ($t_2\alpha \perp$ s").
Nella determinazione grafica del piano α accade, però, che la $t_2\alpha$ non contiene la T_2r. Accade, quindi, che la retta s si presenta perpendicolare al piano α, ma questo non contiene la retta r .
Da quanto esposto si evince che le due rette non sono ortogonali.

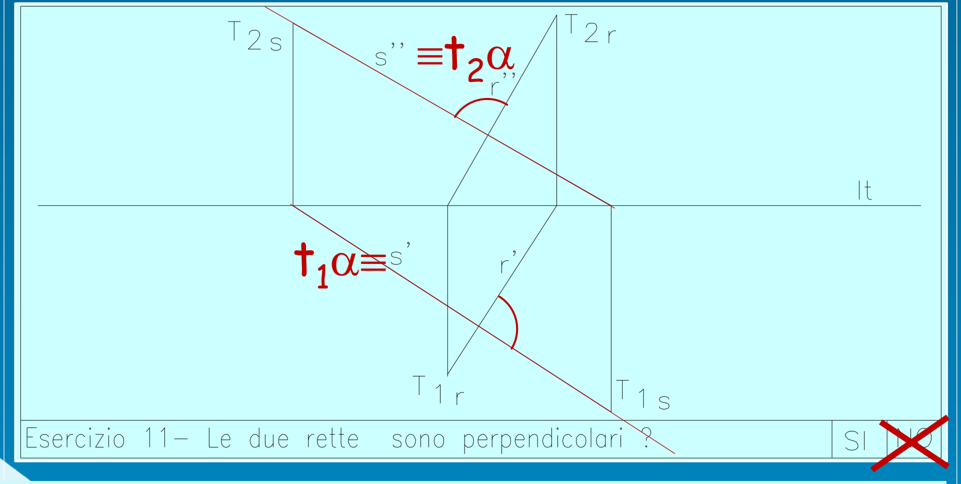
Se facciamo passare la traccia seconda del piano α per la traccia seconda della retta r (T_2r), accade che non si forma il piano perché le due tracce non si intersecano sulla lt nello stesso punto. Abbiamo, quindi, un insieme vuoto che ci conferma, con altra dimostrazione, che le due rette non sono ortogonali.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA ESPLICATIVA (3)

Dato



Risultato

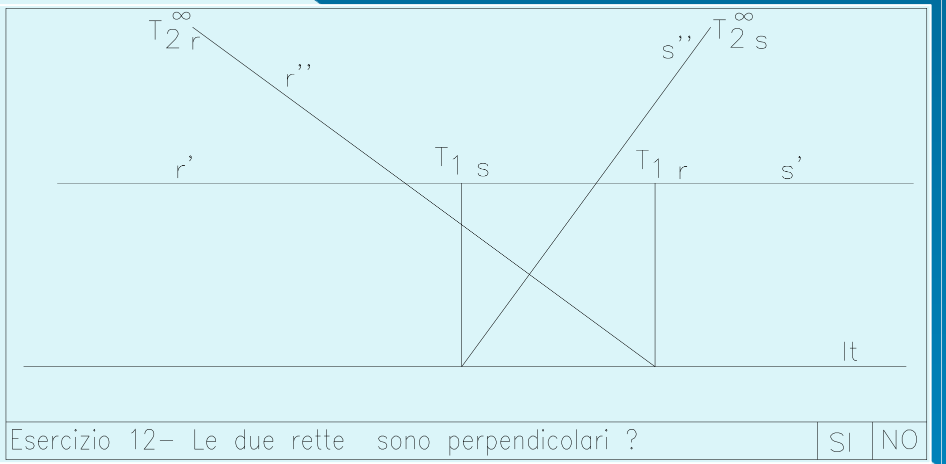


Spiegazione

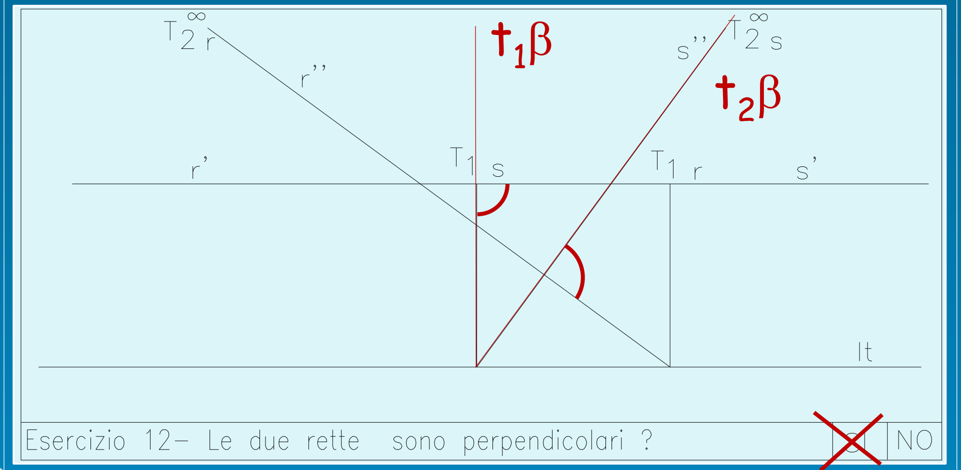
Si costruisce la retta ($t_1\alpha \subset T_1s$) $\perp$ r' quindi, anche, la retta traccia ($t_2\alpha \subset T_2s$) $\perp$ r''.
E' evidente che le due rette (immaginate tracce del piano α) contenenti le tracce della retta s non costituiscono realmente le tracce del piano α in quanto non si intersecano sulla lt nel medesimo punto. (Ricordo che la lt è il luogo geometrico dei punti uniti) .
Si evince, quindi, che le due rette r ed s non sono ortogonali pur presentando le rispettive proiezioni in rapporto di perpendicolarità.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA ESPLICATIVA (4)

Dato



Risultato



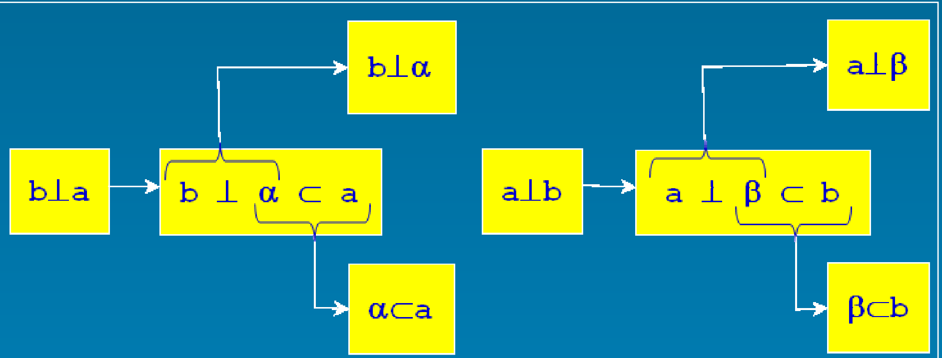
Spiegazione

Si definisce la ($t_1\beta \subset T_1s$) $\perp$ r' quindi si costruisce la ($t_2\beta \subset T_2s$) $\perp$ r''.
In questo caso accade che il piano β contiene la retta s e le sue tracce sono ortogonali alle proiezioni della retta r.
Poiché l'esercizio verifica il doppio legame, (appartenenza e perpendicolarità) possiamo asserire che le due rette sono in rapporto di perpendicolarità.
Ad ulteriore sostegno accade che le due rette sono complanari in quanto appartengono allo stesso piano proiettante in prima proiezione nel secondo diedro.

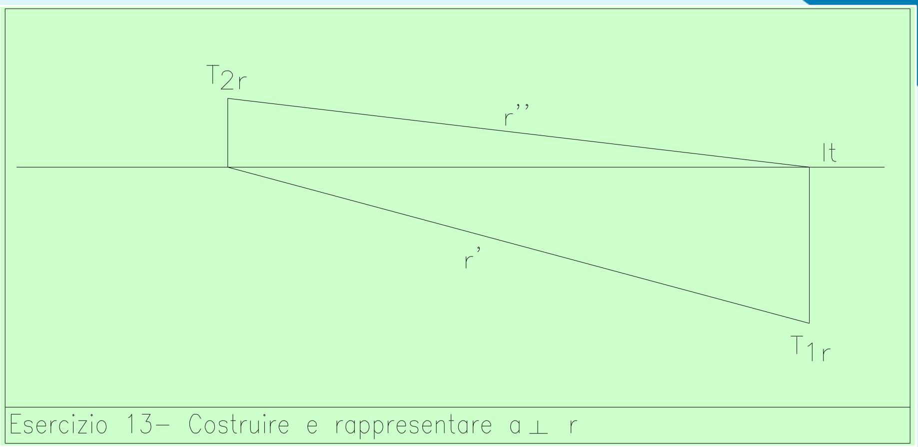
PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA APPLICATIVA (1)

Seguono alcune esemplificazioni grafiche relative all'aspetto applicativo della perpendicolarità tra rette di diversa tipologia, variamente collocate nello spazio dei diedri.

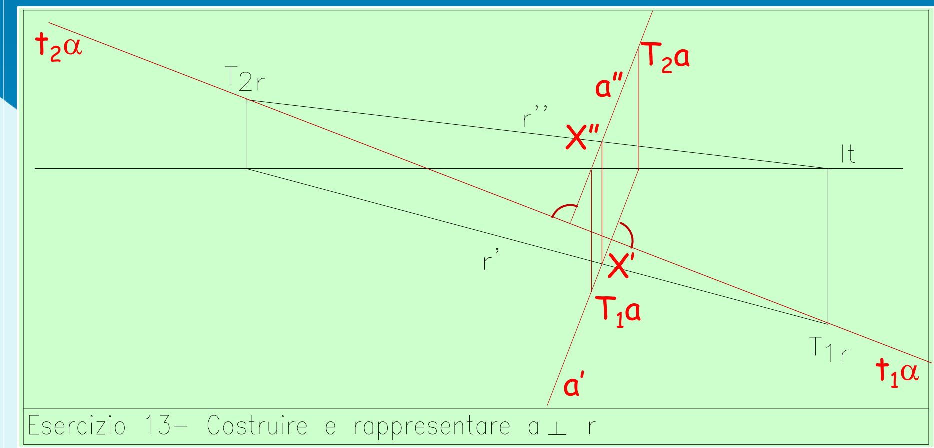
Date le seguenti formalizzazioni impositive delle leggi di perpendicolarità, risolvere i grafici di seguito



Dato



Risultato

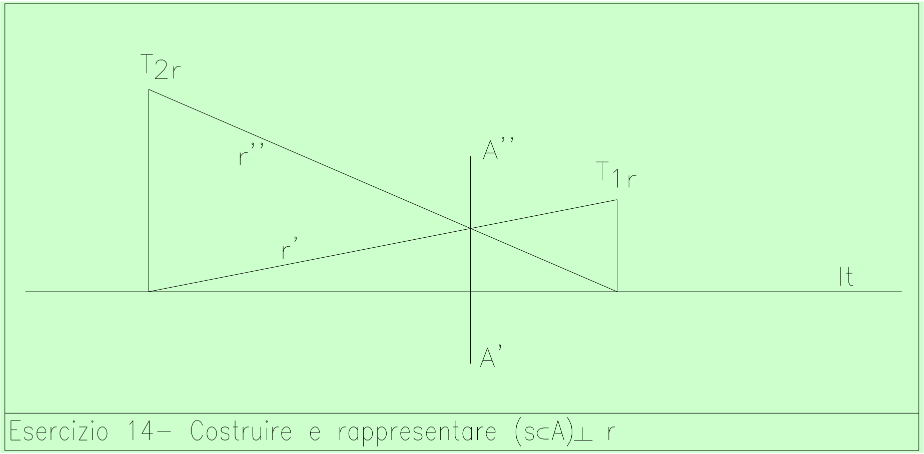


Spiegazione

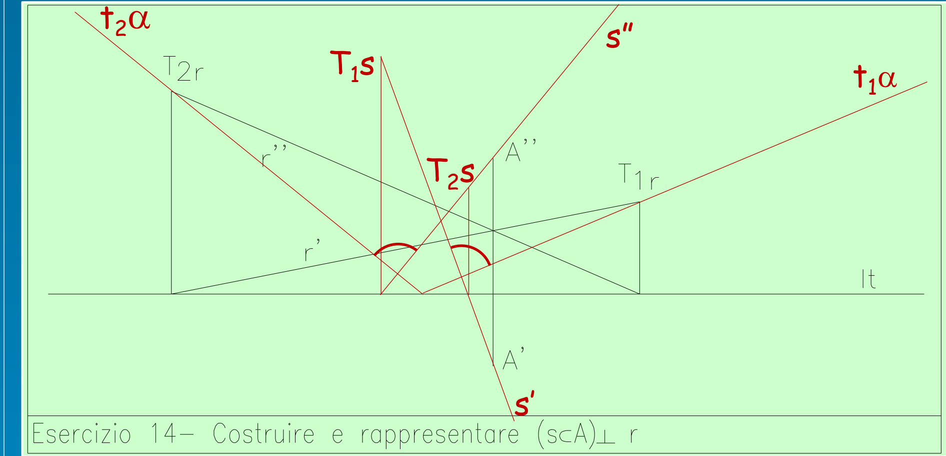
Si definisce un piano $\alpha \subset r$. In questo caso il piano è un piano generico con le tracce allineate. Volendo definire rette complanari ortogonali si determina (a piacere in questo caso) un punto ($X \in r$); quindi per il punto X si fa passare le retta a perpendicolare al piano α, cioè tale che sia $(a' \subset X') \perp t_1\alpha$ e $(a'' \subset X'') \perp t_2\alpha$.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA APPLICATIVA (2)

Dato



Risultato

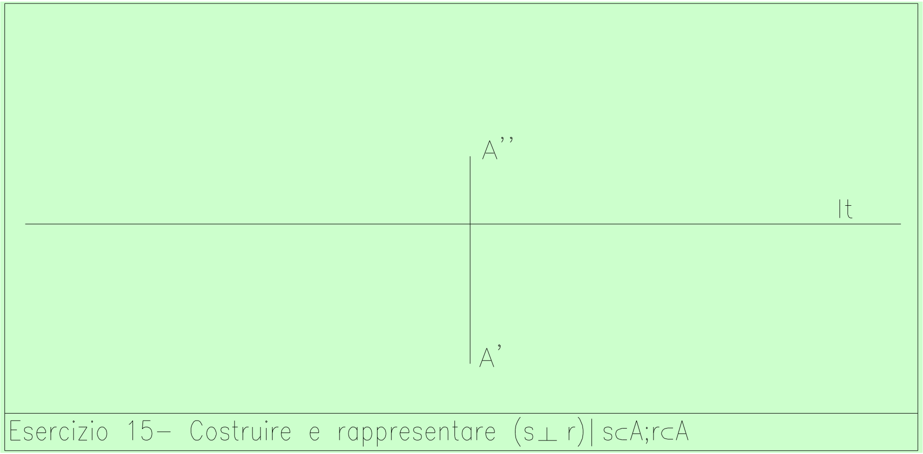


Spiegazione

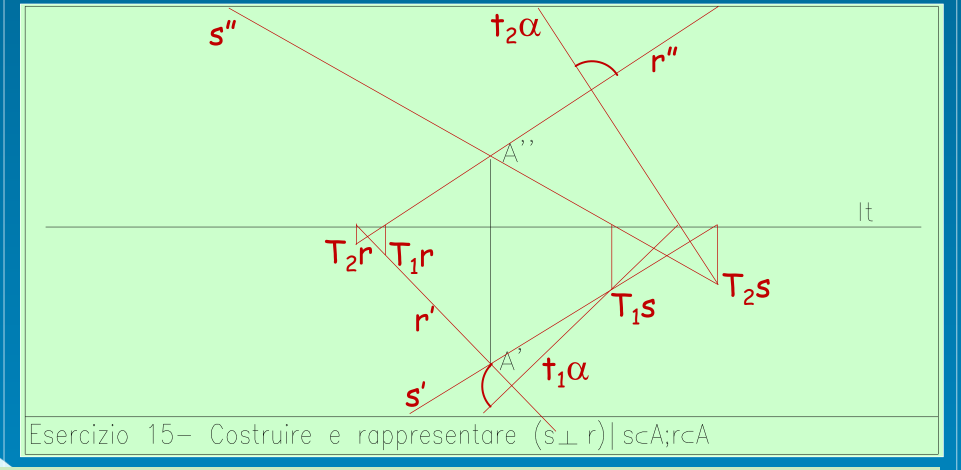
Sapendo che per una retta passano infiniti piani definiamo, a piacere, come primo elemento geometrico per la risoluzione del problema il piano ($\alpha \subset r$).
In questo caso si è scelto un piano α generico nel secondo diedro che esprime il seguente legame di appartenenza: ($T_1r \in t_1\alpha$) e ($T_2r \in t_2\alpha$).
Definito il piano si disegnano le proiezioni della retta s in modo tale che siano ($s' \subset A'$)$\perp t_1\alpha$ e ($s'' \subset A''$)$\perp t_2\alpha$.
Quindi si completa la definizione della retta s ricercando le due tracce T_1s e T_2s.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA APPLICATIVA (3)

Dato



Risultato



Spiegazione

Definite le proiezioni della retta $s(s', s'') \subset A(A', A'')$ determiniamo le tracce T_1s e T_2s della medesima retta s.

Per queste tracce facciamo passare un piano α tale che sia:

$(t_1\alpha \subset T_1s)$ e $(t_2\alpha \subset T_2s)$.

Poiché per una retta passano infiniti piani si sceglie (in questo esercizio) un piano generico α nel primo diedro.

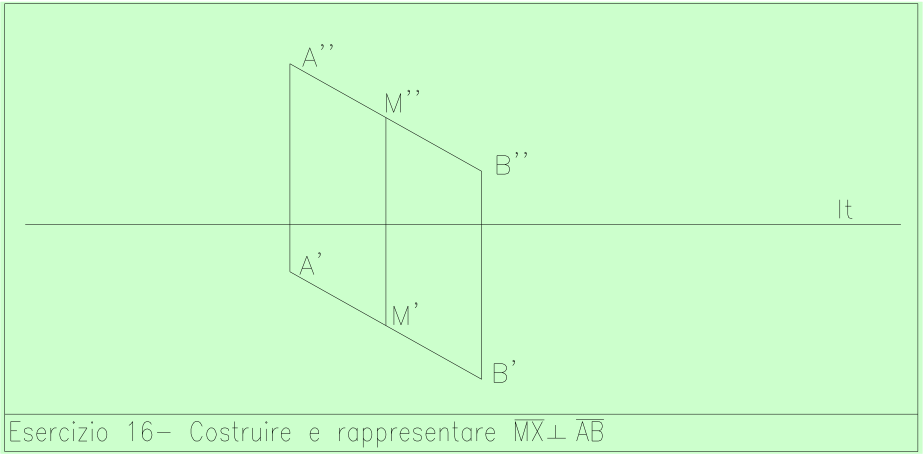
Per completare l'esercizio è sufficiente condurre per il punto $A(A', A'')$ la retta r perpendicolare al piano α, tale che sia:

$(r' \perp t_1\alpha) \subset A'$ e $(r'' \perp t_2\alpha) \subset A''$.

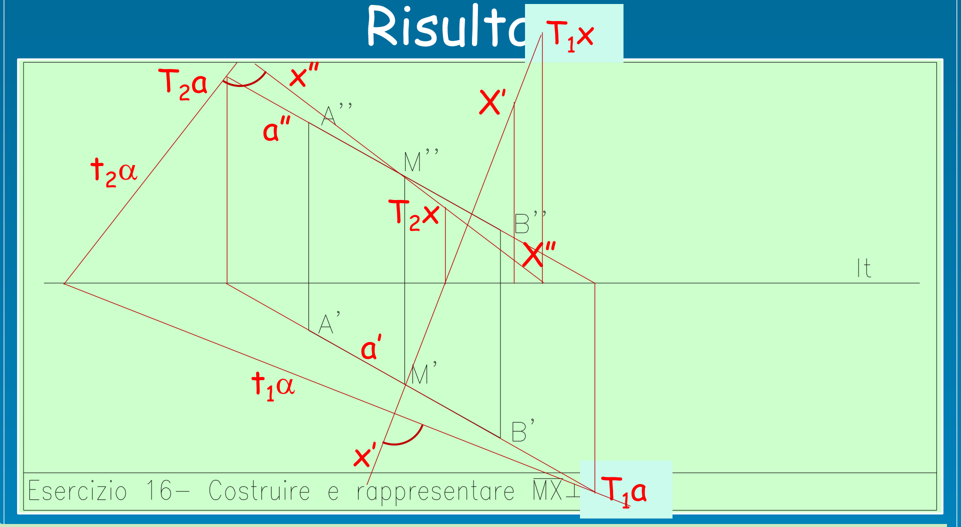
Le due rette così costruite saranno in rapporto di ortogonalità complanare intersecandosi nel punto $A \in s \in \alpha$.

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA APPLICATIVA (4)

Dato



Risultato



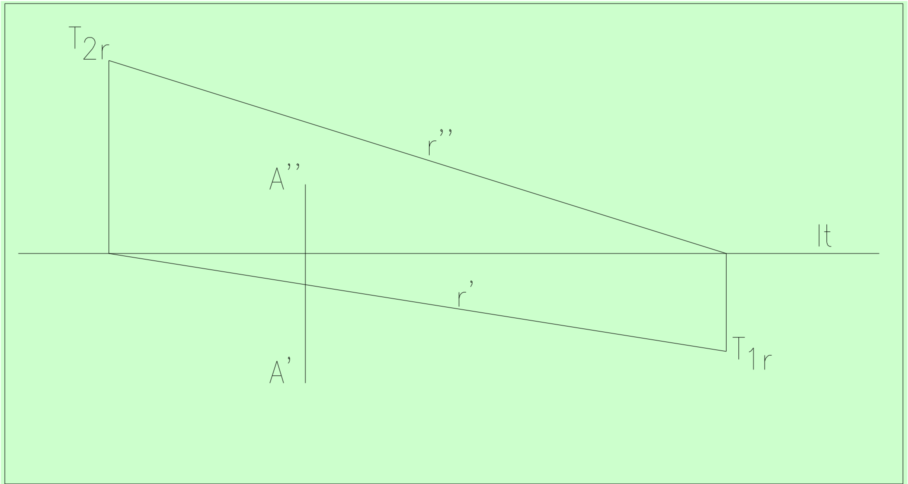
Spiegazione

Dopo aver definito le proiezioni della retta a contenente le proiezioni del segmento AB, si definiscono le tracce T_1a e T_2a.
Per queste tracce si conduce un piano α tale che sia:
($t_1\alpha \subset T_1a$) e ($t_2\alpha$ T_2a). Per le proiezioni del punto M(M'; M") si conduce, quindi, una retta x(x';x") perpendicolare al piano α contenente la retta a che contiene il segmento AB che, a sua volta, contiene il punto M. Sulla retta x si definisce, poi, un punto X(X',X") quale estremo del segmento MX. Il segmento MX, così definito, sarà perpendicolare al segmento AB perché i due segmenti appartengono a due rette perpendicolari tra loro.
I due segmenti così costruiti saranno in rapporto di ortogonalità complanare perché appartengono a due distinte rette incidenti nel punto M.

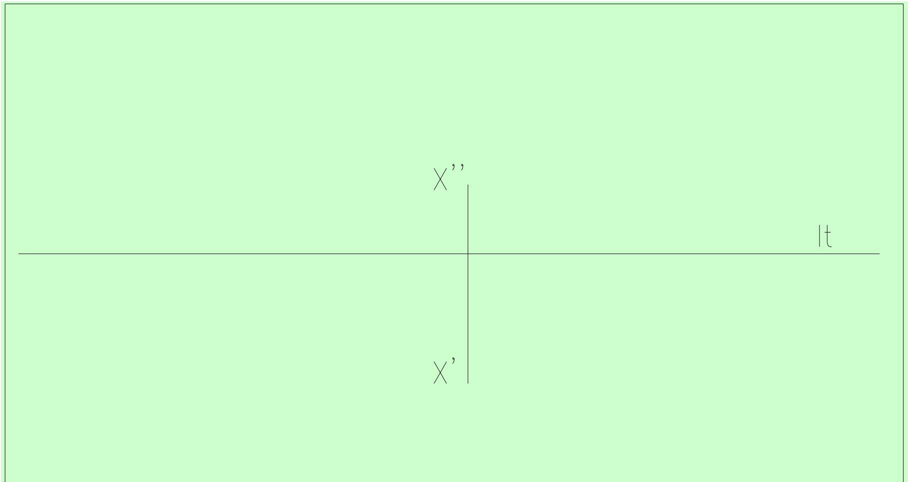
PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA

PROPOSTE DI TEMI GRAFICI SULLA CONDIZIONE DI ORTOGONALITA' TRA RETTE (1)

Esercizio

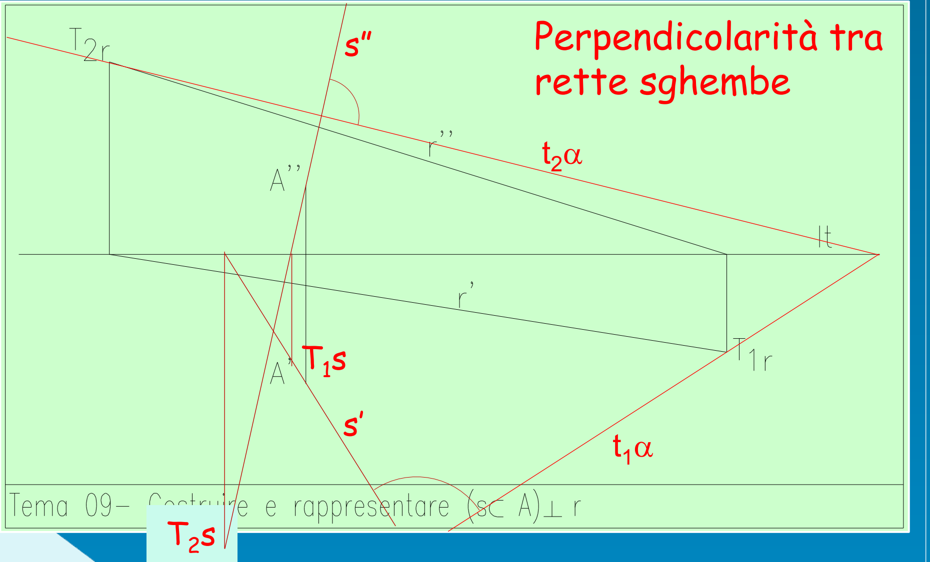


Tema 09– Costruire e rappresentare $(s \subset A) \perp r$

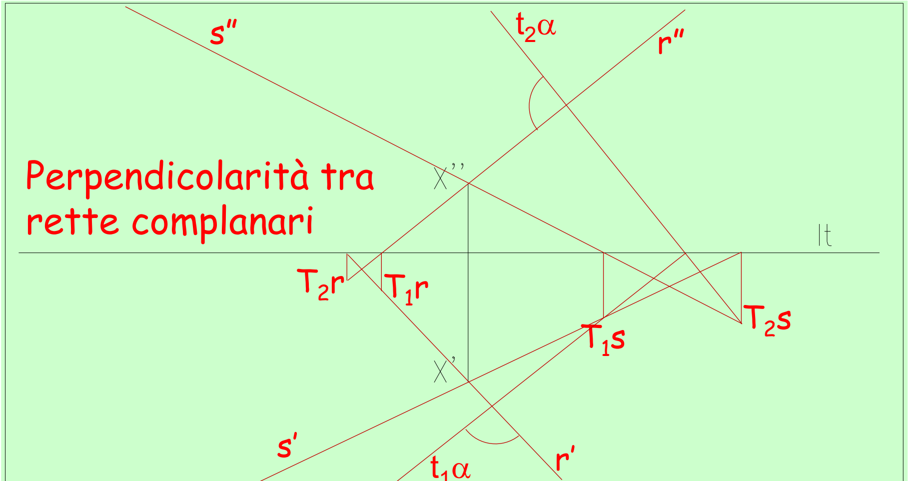


Tema 10– Costruire e rappresentare $(s \subset X) \perp (r \subset X)$

Risoluzione



Tema 09– Costruire e rappresentare $(s \subset A) \perp r$

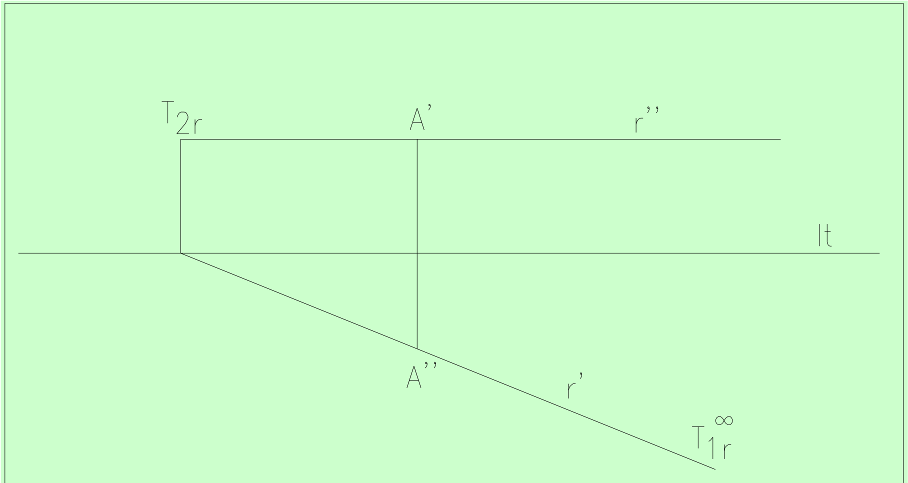


Tema 10– Costruire e rappresentare $(s \subset X) \perp (r \subset X)$

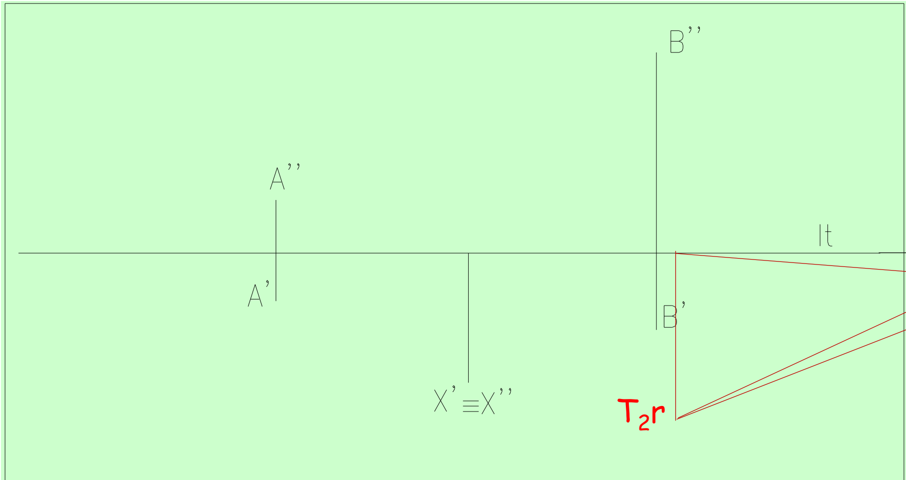
PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA

PROPOSTE DI TEMI GRAFICI SULLA CONDIZIONE DI ORTOGONALITA' TRA RETTE (2)

Esercizio

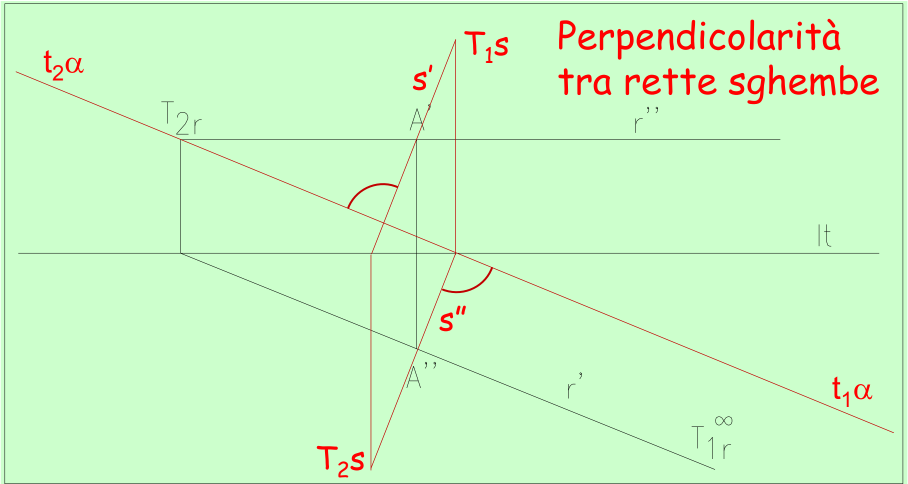


Tema 11– Costruire e rappresentare $(s \subset A) \perp r$

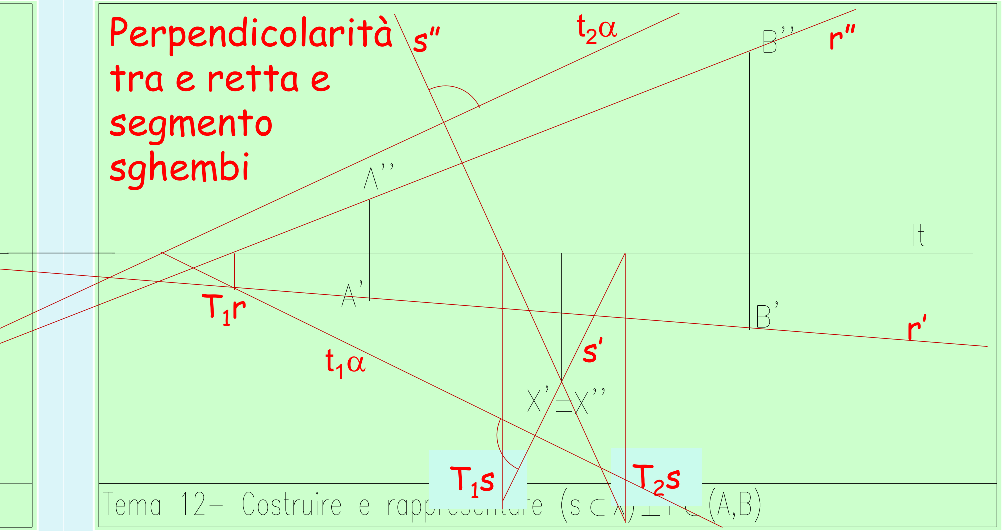


Tema 12– Costruire e rappresentare $(s \subset X) \perp r \subset (A,B)$

Risoluzione



Tema 11– Costruire e rappresentare $(s \subset A) \perp r$



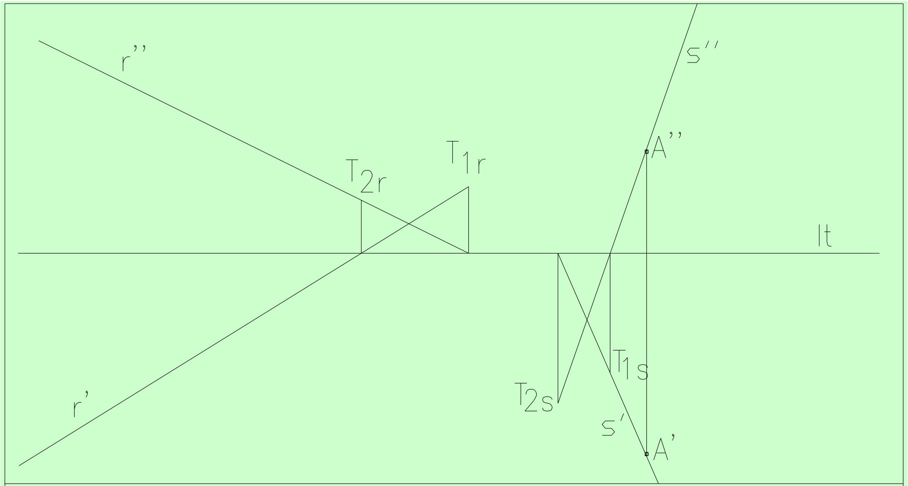
Tema 12– Costruire e rappresentare $(s \subset X) \perp r \subset (A,B)$

La risoluzione grafica dell'esercizio si sviluppa anche fuori dai limiti della finestra grafica

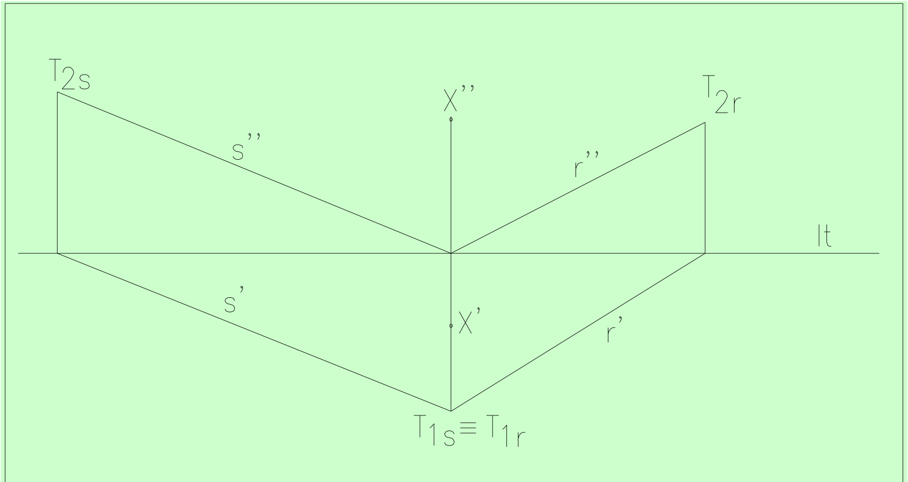
PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA

PROPOSTE DI TEMI GRAFICI SULLA CONDIZIONE DI ORTOGONALITA' TRA RETTE (3)

Esercizio

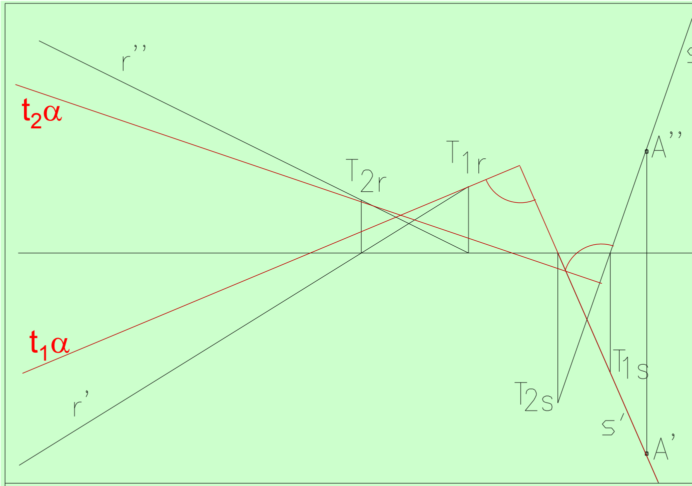


Tema 13– Verificare se $s \perp r$



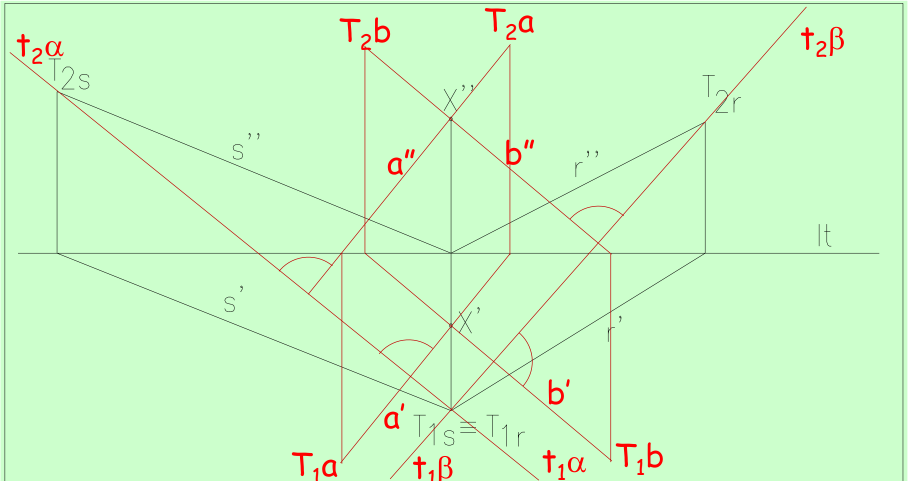
Tema 14– Costruire e rappresentare $(a \subset X) \perp s$; $(b \subset X) \perp r$

Risoluzione



Le due rette non sono ortogonali perché pur essendo ($T_1r \in t_1\alpha \perp s'$) e ($T_2r \in t_2\alpha \perp s''$) le rette $t_1\alpha$, $t_2\alpha$ non formano le tracce di un piano

Tema 13– Verificare se $s \perp r$

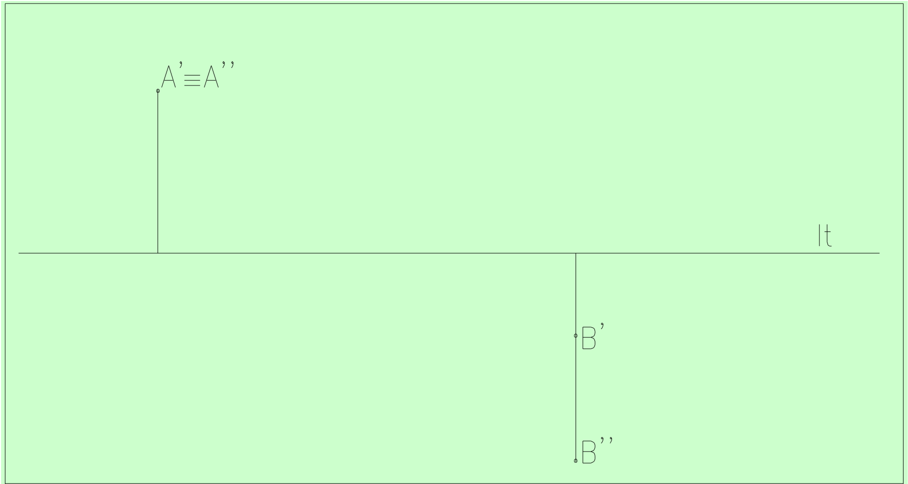


Tema 14– Costruire e rappresentare $(a \subset X) \perp s$; $(b \subset X) \perp r$

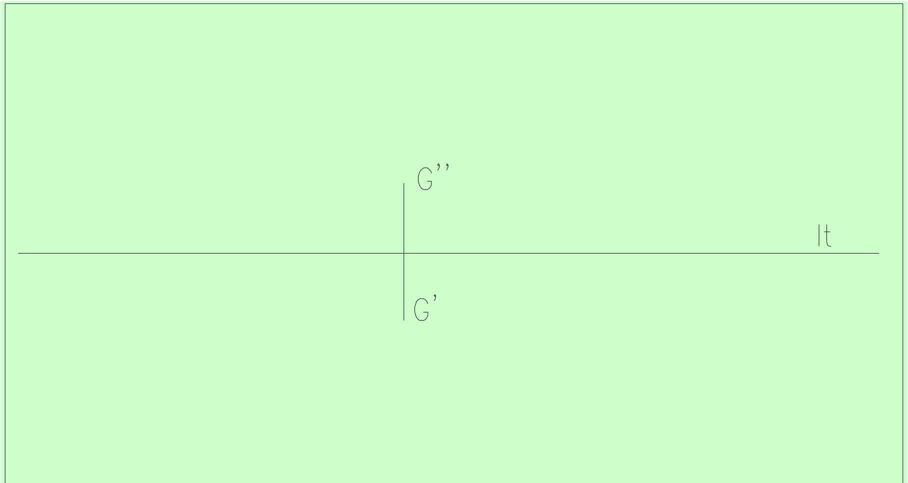
PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA

PROPOSTE DI TEMI GRAFICI SULLA CONDIZIONE DI ORTOGONALITA' TRA RETTE (4)

Esercizio

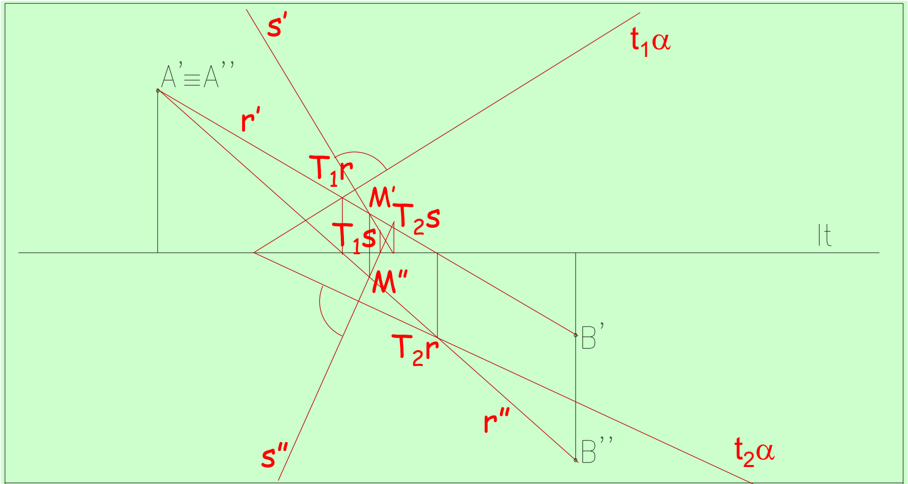


Tema 15– Costruire e rappresentare la retta s asse del segmento $\overline{AB}$

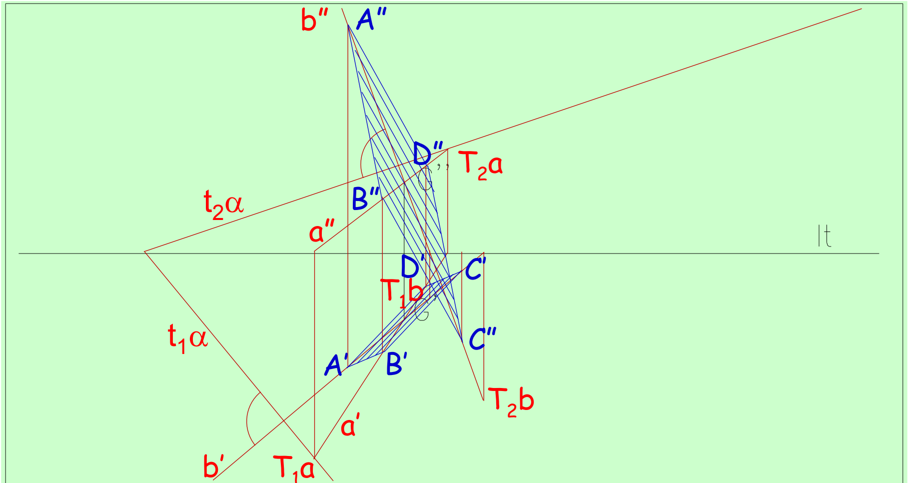


Tema 16– Rappresentare un parallelogramma con diagonali ortogonali e baricentro in G

Risoluzione



Tema 15– Costruire e rappresentare la retta s asse del segmento $\overline{AB}$



Tema 16– Rappresentare un parallelogramma con diagonali ortogonali e baricentro in G

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA- RETTA
TEMI SCRITTI DA VOLGERE E SVILUPPARE IN FORMA DI ELABORATI GRAFICI (1)

1. Dato il punto A(A'=-3;A"=3), costruire e rappresentare le rette s,r così caratterizzate: $(r \subset A) \perp s$; $(s \subset A) \perp r$

2. Dati i punti A(A'=-3;A"=5), B(B'=5;B"=-3) definire e rappresentare la retta s asse del segmento AB

3. Dati il piano $\alpha(\angle \pi^{+}_{1} \angle \pi^{+}_{2})$ ed il punto $X \in \alpha$, definire e rappresentare le rette seguenti: $(a \subset X) \perp (b \subset X)$

4. Definire e rappresentare due rette generiche perpendicolari tra loro, collocate nello spazio del II diedro

5. Dati il piano $\alpha(\perp \pi^{+}_{1} \angle \pi^{+}_{2})$ ed i punti A(A'=2;A"=2), B(B'=3;B"=5) tali che $(A,B) \in \alpha$, definire e rappresentare il segmento $CD \in r \perp s \subset (A,B) | C$ medio del segmento AB

6. Date le rette geometricamente così caratterizzate $a(//\pi^{+}_{1} \angle \pi^{+}_{2})$, $b(//\pi^{+}_{1} \angle \pi^{+}_{2})$ e le relative tracce $T_{2a}=3$; $T_{2b}=3$, definire e rappresentare una retta $r \perp a$ ed una retta $s \perp b$ rispettivamente per un punto $A \in (r,a)$ ed un punto $B \in (s,b)$

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA-RETTA
TEMI SCRITTI DA VOLGERE E SVILUPPARE IN FORMA DI ELABORATI GRAFICI (2)

7. Dato il punto P(P'=-4; P"=6) costruire e rappresentare le rette $a(//\pi^{-}\angle\pi^{+}_{2}) \perp b(//\pi^{-}_{1}\angle\pi^{+}_{2})$ in modo tale che sia: $P \in a$; $P \in b$

8. Definire e rappresentare le rette $a(\angle\pi^{-}_{1}\angle\pi^{+}_{2})$; $b(\angle\pi^{-}_{1}\angle\pi^{+}_{2})$ in modo tale che si verifichi il rapporto geometrico $a \perp b$

9. Dati X(X'=5;X"=5), Y(Y'=2;Y"=3) costruire e rappresentare il triangolo rettangolo XYZ, con dimensioni a scelta dell'allievo, retto nel vertice X.

10. Dati i punti A(A'=1;A"=4), B(B'=4;B"=1) costruire e rappresentare il rettangolo ABCD, con dimensioni a scelta dell'allievo, sapendo che il segmento AB ne rappresenta un lato

11. Sia dato il punto V(V'=4;V"=6) e sapendo che esso rappresenta il vertice di un triangolo rettangolo con l'angolo retto in V, si rappresenti lo stesso, secondo dimensioni a scelta dello studente

12. Data la retta $a(T_{1a}=6;T_{2a}=7)$ definire e rappresentare due punti $(A,B) \in a$. Sapendo, poi, che essi rappresentano gli estremi dell'asse di un rettangolo XYXW, definire e rappresentare lo stesso con dimensioni a scelta dello studente

PERPENDICOLARITA' TRA ELEMENTI GEOMETRICI UGUALI: RETTA -RETTA
GRIGLIA DI VALUTAZIONE DEGLI ELABORATI GRAFICI

Si riporta, di seguito, una griglia utilizzata per la valutazione sia dei test che delle esercitazioni grafiche sviluppate sotto forma di elaborati. Si considerano tre parametri fondamentali:

1)Conoscenze teoriche 2)Capacità logiche 3)Competenze grafiche

VALUTAZIONE DELLE ESERCITAZIONI GRAFICHE

Ogni elaborato è costituito da quattro esercizi che vengono, singolarmente, valutati secondo la seguente griglia

Test Eserc.	Elementi della valutazione	Valutazioni			Punti
1	Conoscenze teoriche (Conoscenza dei concetti, delle regole, delle leggi)	0,00	0,50	1,00	2,50
	Capacità logiche (Capacità di trasporre conoscenze teoriche in elaborazioni grafiche)	0,00	0,50	1,00	
	Competenze grafiche (Precisione, chiarezza, leggibilità, essenzialità, didascalie,ecc.)	0,00	0,25	0,50	
2	Conoscenze teoriche (Conoscenza dei concetti, delle regole, delle leggi)	0,00	0,50	1,00	2,50
	Capacità logiche (Capacità di trasporre conoscenze teoriche in elaborazioni grafiche)	0,00	0,50	1,00	
	Competenze grafiche (Precisione, chiarezza, leggibilità, essenzialità, didascalie,ecc.)	0,00	0,25	0,50	
3	Conoscenze teoriche (Conoscenza dei concetti, delle regole, delle leggi)	0,00	0,50	1,00	2,50
	Capacità logiche (Capacità di trasporre conoscenze teoriche in elaborazioni grafiche)	0,00	0,50	1,00	
	Competenze grafiche (Precisione, chiarezza, leggibilità, essenzialità, didascalie,ecc.)	0,00	0,25	0,50	
4	Conoscenze teoriche (Conoscenza dei concetti, delle regole, delle leggi)	0,00	0,50	1,00	2,50
	Capacità logiche (Capacità di trasporre conoscenze teoriche in elaborazioni grafiche)	0,00	0,50	1,00	
	Competenze grafiche (Precisione, chiarezza, leggibilità, essenzialità, didascalie,ecc.)	0,00	0,25	0,50	
	PUNTEGGIO TOTALE				10,00

Per maggiore completezza ed approfondimento degli argomenti si può consultare il seguente sito

http://www.webalice.it/eliofragassi