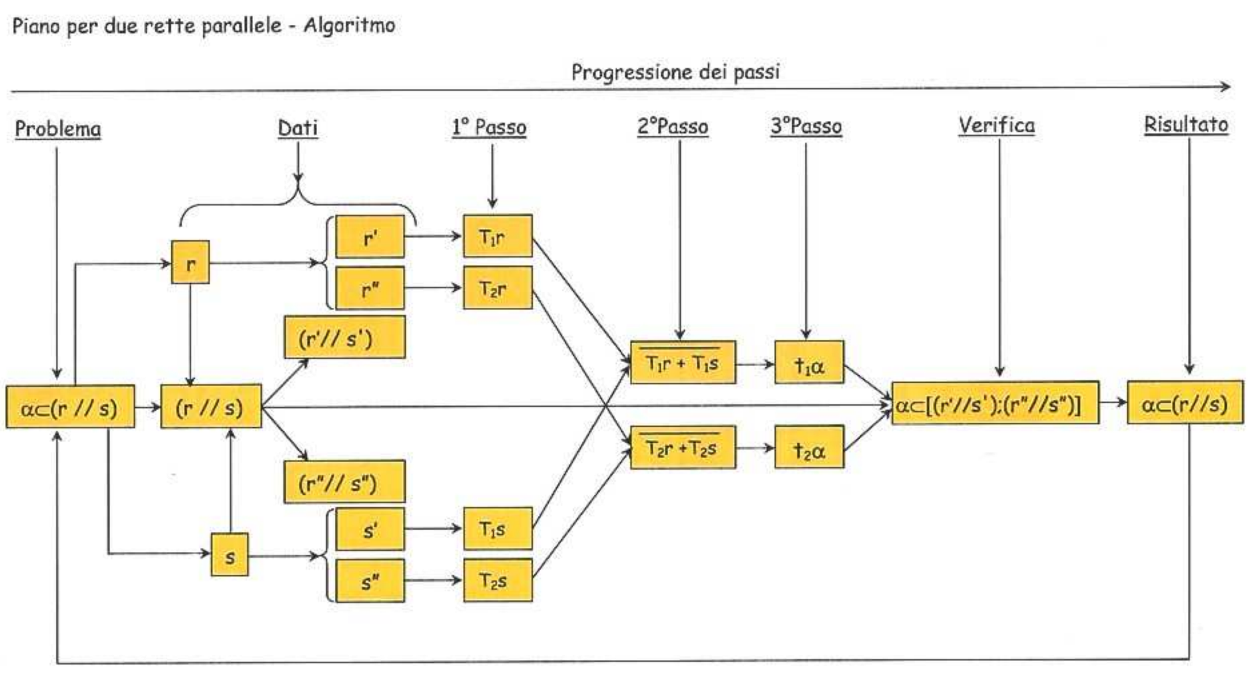
ALGORITMO GRAFICO DEL PIANO PASSANTE PER DUE RETTE PARALLELE

Un piano rimane individuato, in modo univoco, mediante due rette distinte e parallele.
A conclusione del procedimento di applicazione dell'algoritmo grafico è necessario che si verifichi la seguente legge di appartenenza e/o relativa contenenza.

$\alpha \subset (r \,//\, s)$ reciprocamente $(r \,//\, s) \in \alpha$

Assegnate, pertanto, due rette distinte e parallele collocate nello spazio del diedro, il problema si risolve sviluppando i passaggi sintetizzati nello schema sottostante del relativo algoritmo grafico.

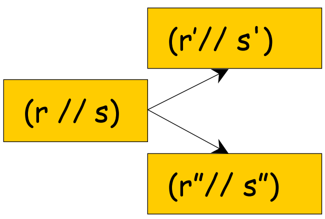
Algoritmo grafico



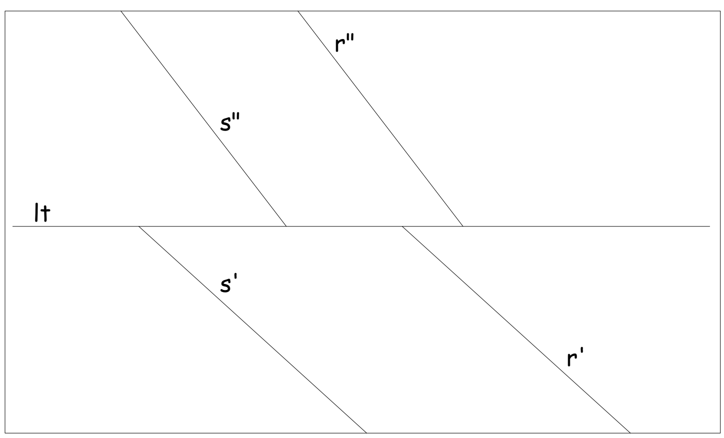
Sviluppo dell'algoritmo

Dati

Siano assegnate due rette r(r'; r") ed s(s'; s") parallele collocate nello spazio del primo diedro.
Perché siano parallele, per la relativa legge geometrico-descrittiva, tali devono essere le rispettive poroiezioni per cui sarà:



Operazioni grafiche relative

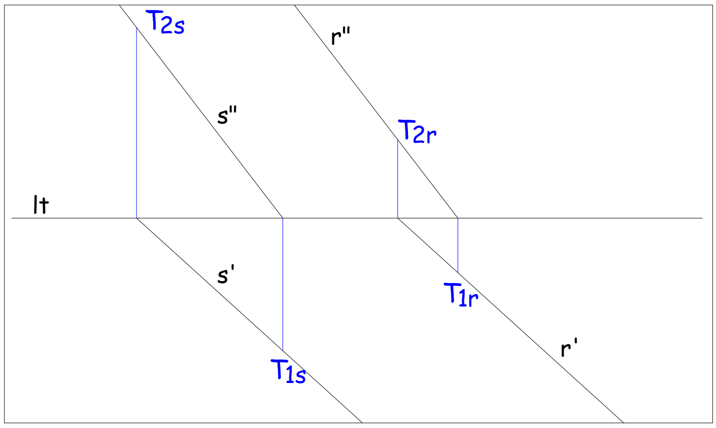


Primo passo

Poiché una retta è pienamente definita, in forma descrittiva, quando si conoscono sia le proiezioni sia le tracce; come primo passo è necessario ricercare le tracce delle rette che, geometricamente, sono punti reali uniti ai piani di proiezione e appartenenti alle proiezioni stesse, per cui si avrà:

T_1r	T_1s	Tracce delle rette su π_1
T_2r	T_2s	Tracce delle rette su π_2

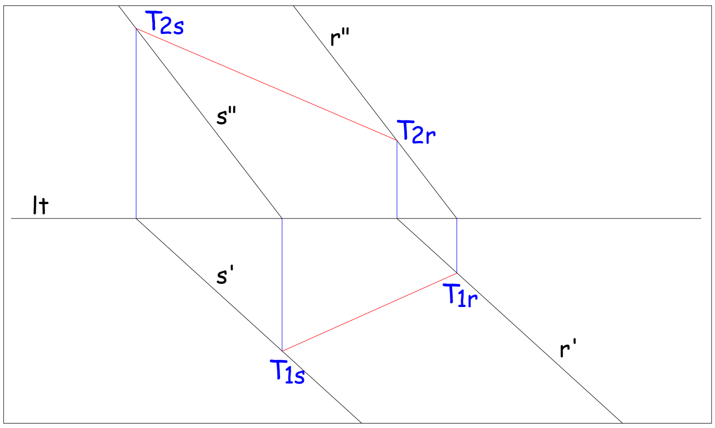
La determinazione delle tracce si ottiene eseguendo la proiezione dei piedi delle stesse. (Si ricorda che per piede della traccia s'intende l'intersezione di una proiezione con la linea di terra).



Secondo passo

Si ricorda, anzitutto, che le tracce di un piano sono rette; inoltre per definire una retta è necessario conoscere due punti. Nel nostro caso collegando (sommando) le due tracce prime si ottiene la traccia prima del piano α su π_1 e collegando (sommando) le due tracce seconde si ottiene la seconda traccia del piano α su π_2 come sintetizzato di seguito:

$\overline{T_1r + T_1s}$	Segmento di retta su π_1
$\overline{T_2r + T_2s}$	Segmento di retta su π_2



Passo terzo

Le tracce del piano $(t_1\alpha)$ e $(t_2\alpha)$ sono rette reali ottenute come:

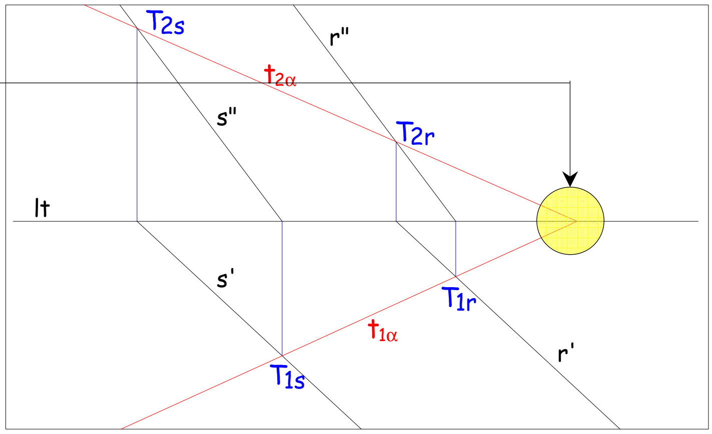
$$t_{1\alpha} = \sum_{-\infty}^{\to+\infty} \left\{ \overline{\overline{T}}_1 \right\} \qquad t_{2\alpha} = \sum_{-\infty}^{\to+\infty} \left\{ \overline{\overline{T}}_2 \right\}$$

Estendendo i segmenti di cui al passo precedente si determinano le due tracce

($t_1\alpha$) e ($t_2\alpha$) del piano passante per le due rette assegnate.

$T_1r + T_1s \rightarrow t_1\alpha$

$T_2r + T_2s \rightarrow t_2\alpha$



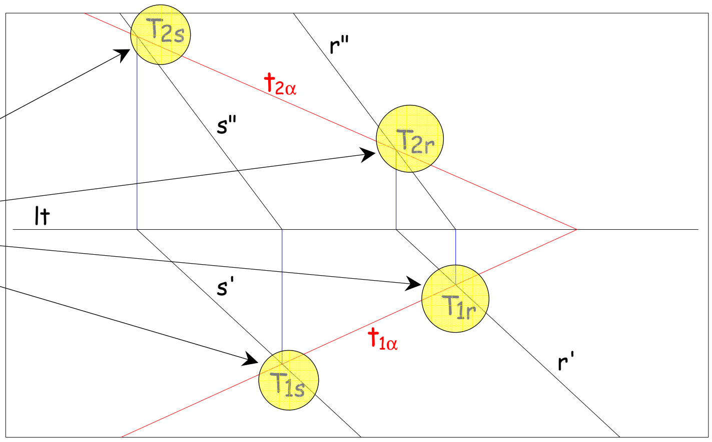
La verifica che le rette definiscano un piano si ha se le tracce intersecano la lt nel medesimo punto (punto unito alla lt).

In alternativa le tracce devono essere parallele alla lt, significando che l'intersezione avviene in un punto improprio.

Verifica

Definite le due tracce rappresentative del piano e controllato che s'intersecano sulla lt nel medesimo punto, è necessario effettuare la verifica mediante la legge della contenenza tra piano e retta espressa descrittivamente come segue:

$$\alpha \subset [(r'//s'); (r''//s'')]$$



mentre verbalmente si dice che: "**un piano contiene una retta se, e solo se le tracce del piano contengono le rispettive omonime tracce della retta**"; come verificato.

Risultato

Eseguita la verifica con esito positivo si possono assumere le tracce del piano come gli elementi geometrici rappresentativi del piano passante per le due rette parallele assegnate r ed s in quanto accade che:

$$\alpha \subset (r//s)$$

ESERCITAZIONI GRAFICHE

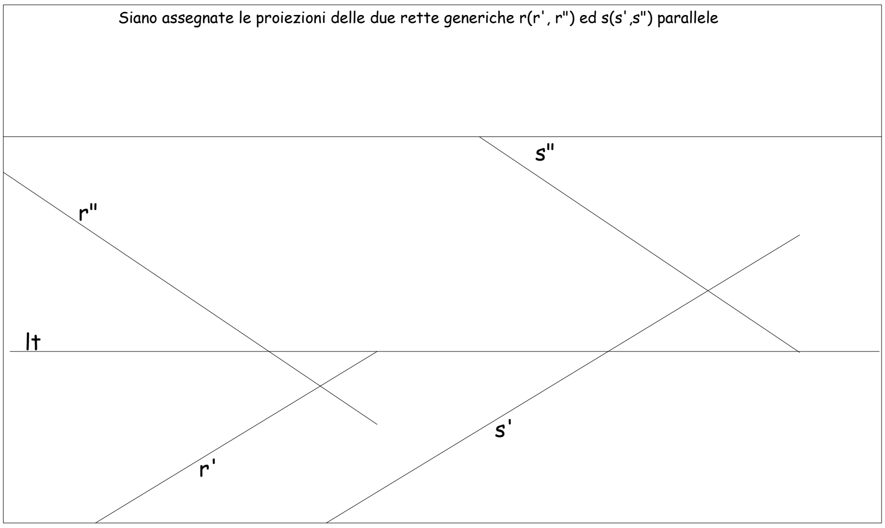
Seguono due applicazioni grafiche con diverse tipologie di rette collocate in differenti diedri ed assegnate mediante le proiezioni

ESERCIZIO N° 1 - Due rette generiche nel primo diedro

Esercizio 1 - Dati

Siano assegnate le proiezioni di due rette generiche $r(r'; r'')$ ed $s(s'; s'')$ collocate nel primo diedro e parallele tra loro.

Si ricorda che la condizione di parallelismo tra rette sussiste se tali sono le rispettive proiezioni.

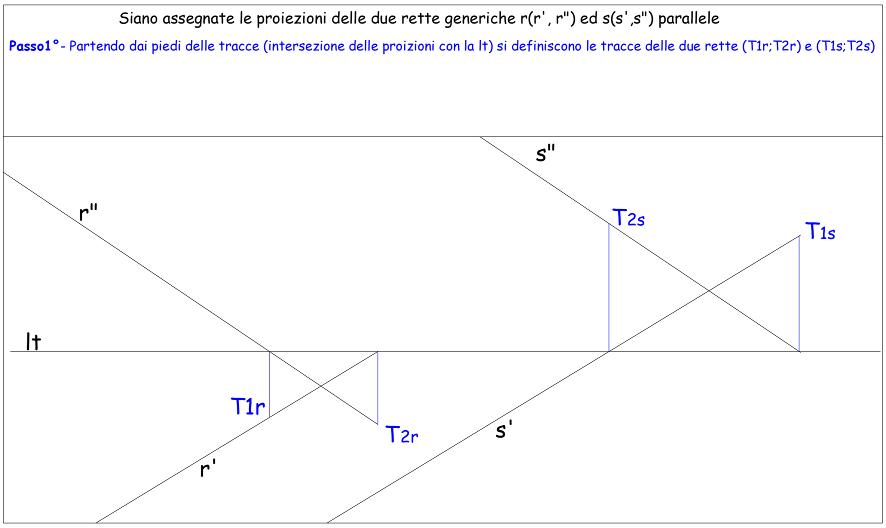


Esercizio 1 – Passaggio 1

Individuati i piedi delle tracce (intersezioni delle proiezioni con la lt) si determinano le tracce delle rette come punti reali uniti ai piani di proiezione e appartenenti alle rispettive proiezioni:

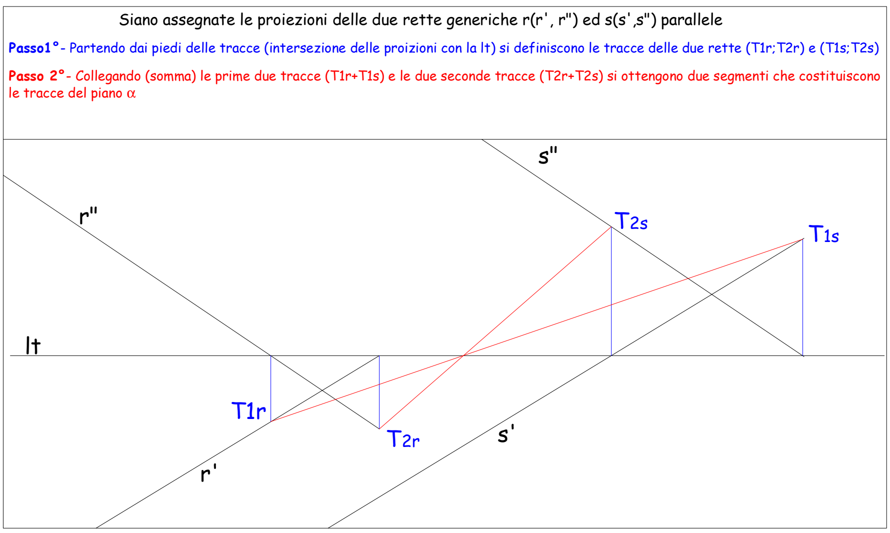
$(T_1r \in r')$, $(T_2r \in r'')$

$(T_1s \in s')$, $(T_2s \in s'')$



Esercizio 1- Passaggio 2

Definite le tracce delle due rette, collegando $(T_1r + T_1s)$ si ottiene il segmento di retta relativo alla traccia del piano α su π_1, collegando $(T_2r + T_2s)$ si ottiene il segmento di retta relativo alla traccia del piano α su π_2. In questo modo si determinano le direzioni delle due tracce del piano che, per essere tali, devono intersecare la lt nel medesimo punto (punto reale unito alla lt).

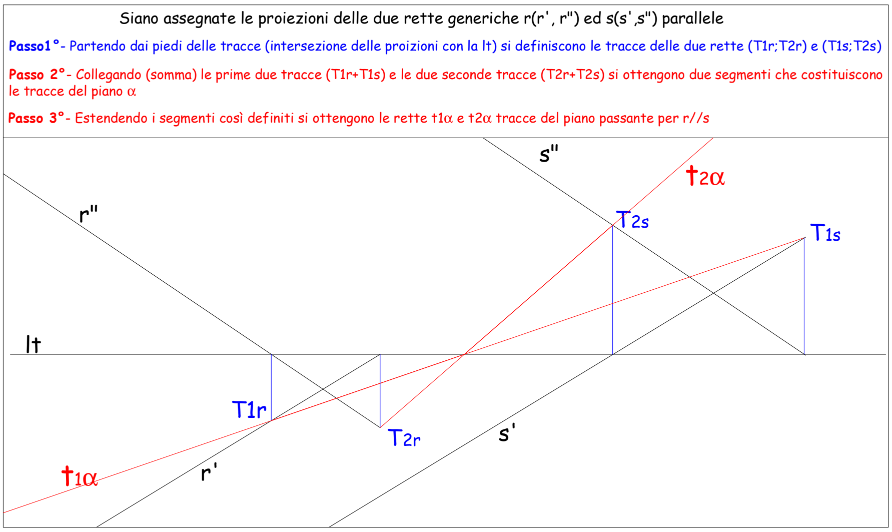


Esercizio 1 – Passaggio 3

Estendendo i due segmenti di retta di cui al passaggio 2, si determinano le rette ($t_1\alpha$) e ($t_2\alpha$) come tracce del piano α assegnato mediante due rette parallele (r // s).
Che le due rette sono tracce del piano è confermato dalla intersezione di queste con la lt nel medesimo punto.

Il controllo si conclude con la verifica di appartenenza delle rette al piano

$$(r \,//\, s) \in \alpha.$$



Verifiche

La verifica grafica, eseguita mediante la condizione di appartenenza, risulta essere congruente sia con il problema geometrico (piano per due rette parallele), sia con l'aspetto descrittivo (ricerca del tipo di piano), sia con l'aspetto rappresentativo (determinazione delle tracce del piano).
Le due rette assegnate r ed s, infatti, appartengono al piano perché le rispettive tracce (due tracce prime e due tracce seconde) appartengono alle omonime tracce del piano (traccia prima di α e traccia seconda di α).
Inoltre le due rette (r, s) sono parallele perché le proiezioni della retta r (r',r") sono parallele alle rispettive omonime proiezioni della retta s(s',s").
Quindi resta completamente verificata la condizione:

$$\boxed{\alpha \subset [(r' // s');(r'' // s'')]}$$

Risultato

Dallo studio delle tracce del piano possiamo risalire, poi, alla tipologia descrittiva del piano che si caratterizza come "**piano generico nel primo diedro**" avente le seguenti caratteristiche geometrico-descrittive.

$$\boxed{(r // s) \in \alpha\ (\angle\pi_1^{+}\ \angle\pi_2^{+})}$$

ESERCIZIO N° 2 – Due rette frontali nel primo diedro

Esercizio 2 - Dati

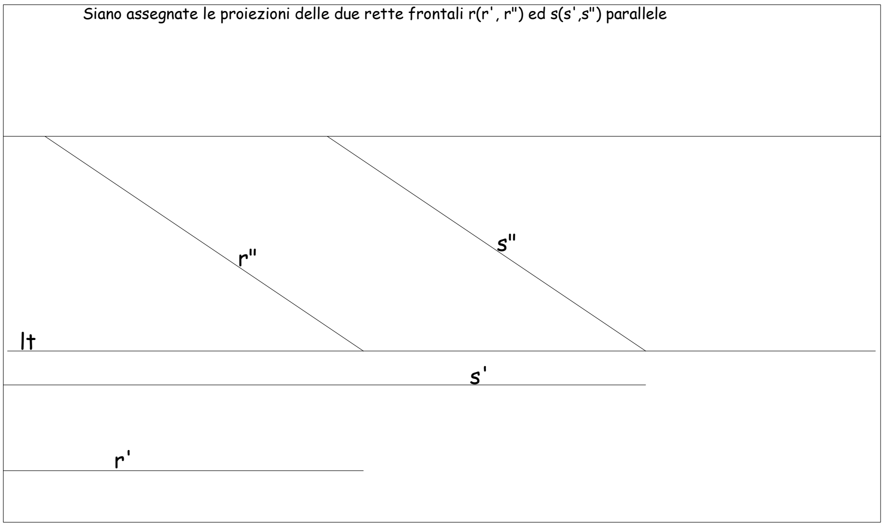
Siano assegnati i seguenti elementi geometrici tutti collocati nello spazio del primo diedro.

Retta frontale r (r';r"),
Retta frontale s (s';s").

Si ricorda che una retta si definisce frontale quando è parallela al piano π_2 e obliqua al piano π_1.

La formalizzazione geometrico-descrittiva della retta frontale assume il seguente aspetto:

$(r\angle\pi_1//\pi_2)$ // $(s\angle\pi_1//\pi_2)$



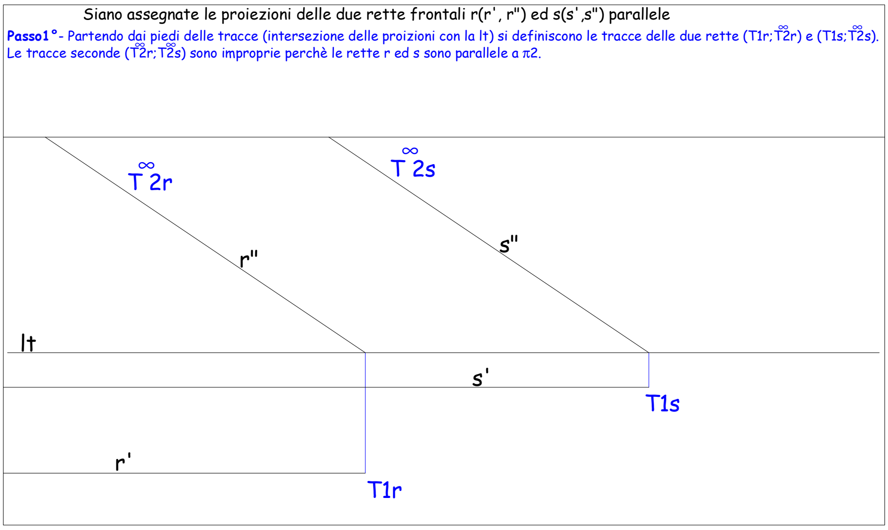
Esercizio 2 – Passaggio 1

Individuati i piedi delle tracce (intersezioni delle proiezioni con la lt) si determinano le tracce delle rette come punti reali uniti ai piani di proiezione e appartenenti alle rispettive proiezioni delle due rette

$(T_1r\in r')$, $(T^{\infty}_2r\in r'')$
$(T_1s\in s')$, $(T^{\infty}_2s\in s'')$

Da notare che essendo le rette r ed s parallele a π^+_2 le traccie seconde diventano punti impropri indicati come (T^{∞}_2r) e (T^{∞}_2s) .

Mi preme ricordare - a tal proposito - che al concetto di punto improprio deve essere sempre associato il concetto di parallelismo tra rette.

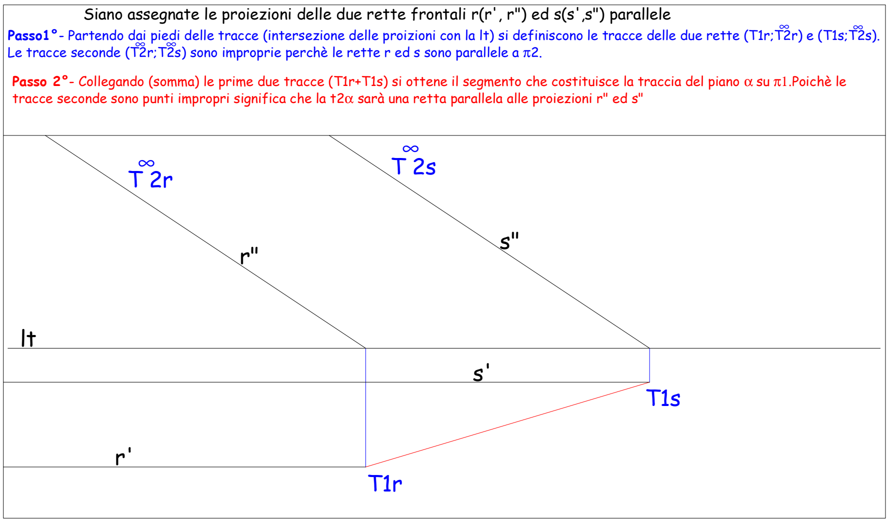


Esercizio 2- Passaggio 2

Definite le tracce delle due rette, collegando ($T_1r + T_1s$) si ottiene il segmento di retta relativo alla traccia del piano α su π_1.

Poiché le tracce seconde delle rette sono improprie la traccia seconda del piano sarà una retta, parallela alle proiezioni di queste, applicata nel punto in cui la $t_1\alpha$ interseca la lt.

In questo modo si fissano le due tracce del piano.



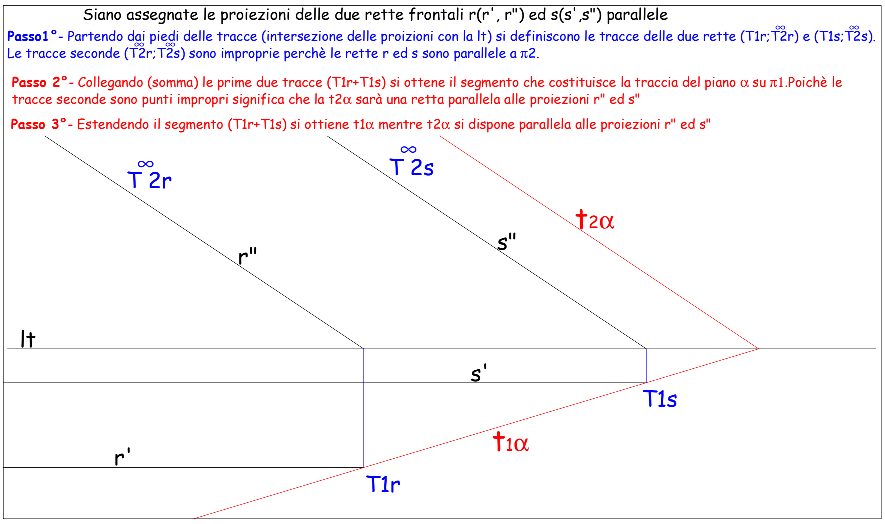
Esercizio 2 – Passaggio 3

Estendendo il segmento, di cui al passaggio 2, su π_1 si determina la retta ($t_1\alpha$) mentre ($t_2\alpha$) si ottiene mediante una retta parallela alle seconde proiezioni r" ed s" applicata nel punto unito sulla lt in cui la $t_1\alpha$ interseca la lt.

Essendo entrambe le tracce seconde punti impropri, il punto di applicazione della ($t_2\alpha$) -che deve essere un punto reale- va ricercato sulla lt dove questa si interseca con la ($t_1\alpha$).

Il controllo si conclude con la verifica di appartenenza delle rette al piano definito

$$(r \, // \, s) \in \alpha$$



Verifiche

La verifica grafica, eseguita mediante la condizione di appartenenza, risulta essere congruente sia con il problema geometrico (piano per due rette parallele), sia con l'aspetto descrittivo (ricerca del tipo di piano), sia con l'aspetto rappresentativo (determinazione delle tracce del piano).
Le due rette assegnate r ed s, infatti, appartengono al piano perché le rispettive tracce (due tracce

prime e due tracce seconde) appartengono alle omonime tracce del piano (traccia prima di α e traccia seconda di α).
Inoltre le due rette (r, s) sono parallele perché le proiezioni della retta r (r',r") sono parallele alle rispettive omonime proiezioni della retta s(s',s").
Quindi resta completamente verificata la condizione:

$$\alpha \subset [(r'//s');(r''//s'')]$$

Risultato

Dallo studio delle tracce del piano possiamo risalire, poi, alla tipologia descrittiva del piano che si caratterizza come "**piano generico nel primo diedro**" avente le seguenti caratteristiche geometrico-descrittive.

$$(r//s) \in \alpha \, (\angle\pi_1^+ \, \angle\pi_2^+)$$

Elio Fragassi
http://www.webalice.it/eliofragassi