ALGORITMO GRAFICO PER LA RICERCA DEL PIANO PASSANTE PER UNA RETTA ED UN PUNTO AD ESSA NON APPARTENENTE

a. Ricerca impostata sull'intersezione tra due rette

Siano assegnati una retta r ed un punto P ad essa non appartenente. Siano essi, quindi, due enti geometrici per i quali condurre un piano α .

Avendo necessità di definire le quattro tracce (punti) di due rette necessarie per condurre le due rette tracce del piano e avendo a disposizione una retta solamente, si pone il problema di come individuare, tra le infinite rette di una stella con sostegno nel punto P esterno alla retta r data, una seconda retta passante per il punto assegnato e in grado di contribuire alla risoluzione del problema geometrico-descrittivo.

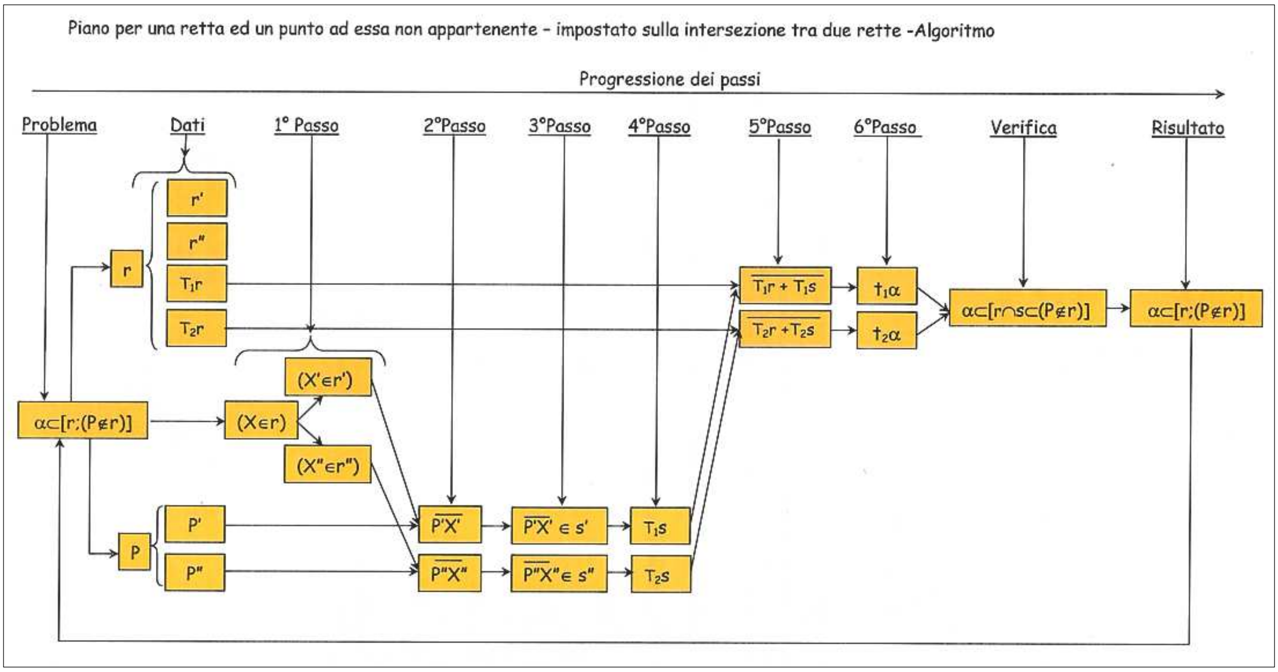
Allora tra le infinite rette della stella avente il punto $(P \notin r)$ come sostegno, se ne sceglie, a piacere, una che interseca la retta data in un punto qualunque a scelta dell'operatore.

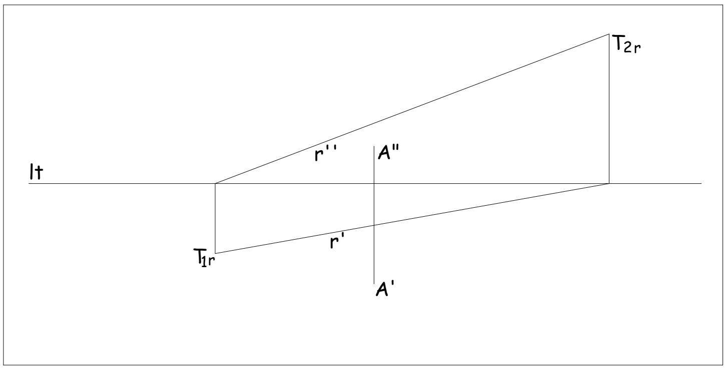
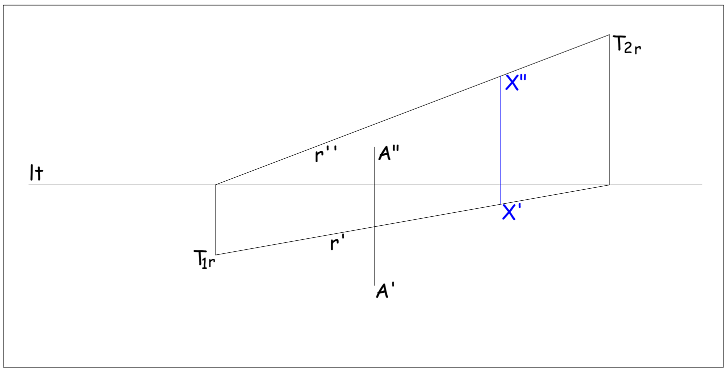
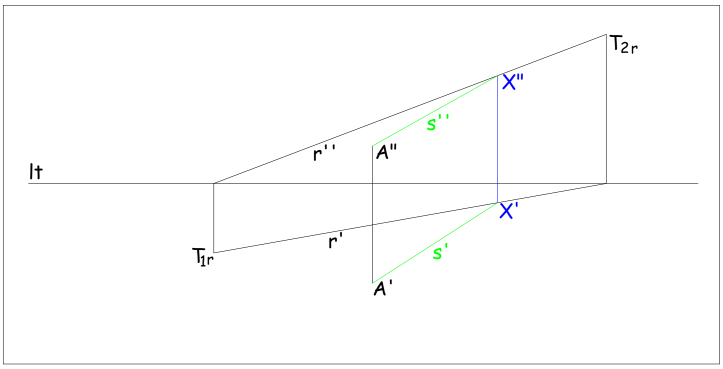
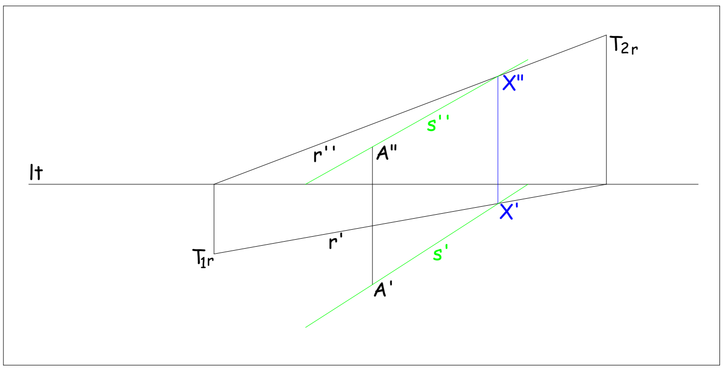
In questo modo si ricade nella procedura, già analizzata, della ricerca di un piano passante per due rette incidenti. Così operando a conclusione della procedura deve verificarsi:

$\boxed{\alpha \subset [r \cap s \subset (P \notin r)]}$ e quindi $\boxed{\alpha \subset [r ; (P \notin r)]}$

Assegnati, quindi, la retta r ed il punto P ad essa non appartenente il problema si risolve mediante i passi sintetizzati nello schema del relativo algoritmo grafico sottostante.

Algoritmo grafico



Sviluppo dell'algoritmo	Operazioni grafiche relative
Dati	
Siano assegnati la retta generica r(r'; r"; T_1r; T_2r) collocata nel primo diedro r: r' ; r" ; T_1r ; T_2r ed il punto A: A' ; A" $A \notin r$	
Primo passo	
Si sceglie, anzitutto, un punto X(X'; X") qualsiasi sulla retta r tale che sia ($X\in$ r) $(X \in r) \rightarrow (X' \in r')$ $(X \in r) \rightarrow (X'' \in r'')$	
Secondo passo	
Si definisce, quindi, il segmento AX(A'X'; A"X"). In questo modo si legano la retta r ed il punto A assegnati. Mediante questo segmento di retta la rappresentazione descrittiva viene così sintetizzata: $\overline{AX} \rightarrow \overline{A'X'}$ $\overline{AX} \rightarrow \overline{A''X''}$	
Terzo passo	
Si estende all'infinito il segmento definito al passo precedente trasformandolo in una retta s assegnata mediante le relative proiezioni (s';s") $\overline{A'X'} \rightarrow s' \longrightarrow \overline{A'X'} \in s'$ $\overline{A''X''} \rightarrow s'' \longrightarrow \overline{A''X''} \in s''$	

che contengono anche il punto X (già appartenente ad r) tanto da avere:

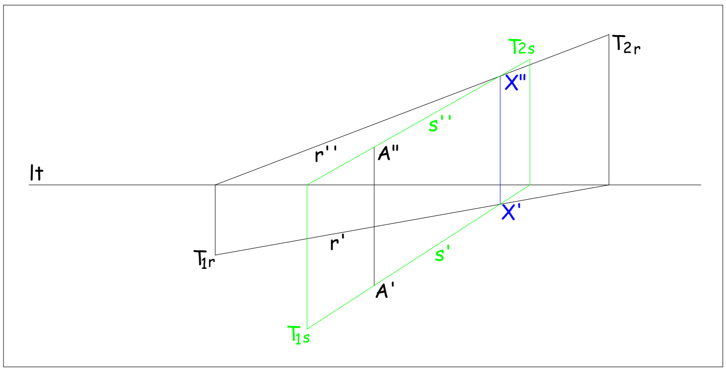
$$[X \in (r,s)] \rightarrow [X' \in (r', s')]$$
$$[X \in (r,s)] \rightarrow [X'' \in (r'', s'')]$$

Con questa operazione si riporta il problema alla ricerca del piano passante per due rette incidenti.

Quarto passo

A questo punto si completa la rappresentazione della retta s(s'; s'') definendone anche le due tracce T_1s e T_2s

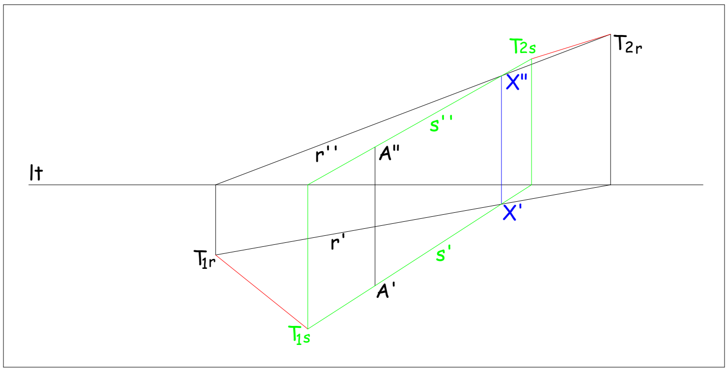
$$s' \rightarrow T_1 s$$
$$s'' \rightarrow T_2 s$$



Quinto passo

Ottenute le tracce della retta s si collegano le due tracce prime per ottenere il segmento che definisce la direzione della $t_1\alpha$ su π_1 e le due seconde tracce per ottenere il segmento che identifica la direzione della $t_2\alpha$ su π_2

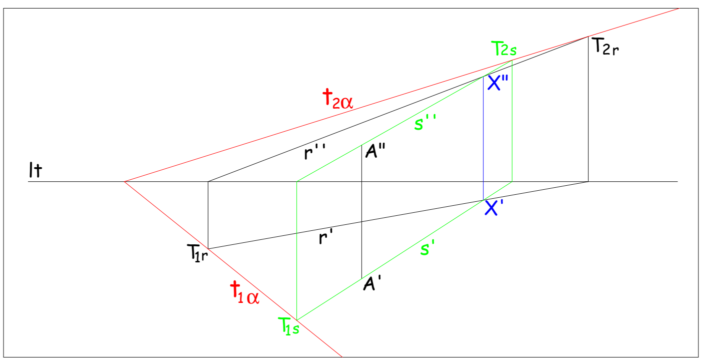
$$\overline{T_1 r + T_1 s}$$
$$\overline{T_2 r + T_2 s}$$



Sesto passo

Poiché le tracce del piano $(t_1\alpha)$ e $(t_2\alpha)$ sono rette reali ottenute come:

$$t_{1\alpha} = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overline{\overline{T_{1r}}} \right\} \qquad t_{2\alpha} = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overline{\overline{T_{2r}}} \right\}$$



Estendendo all'infinito i segmenti così

ottenuti si determinano la tracce del piano α come:

$t_1\alpha$	Traccia del piano α su π_1
$t_2\alpha$	Traccia del piano α su π_2

Verifica	Risultato

Verifica

Determinate le tracce rappresentative del piano e controllato che il loro punto d'intersezione sia un punto unito alla lt o un punto improprio, è necessario eseguire la verifica mediante la legge della contenenza che lega i tre elementi: la retta r, il punto A e la retta s come esplicitato dal passo di verifica dell'algoritmo.

$$\alpha \subset [r \cap s \subset (P \notin r)]$$

Si verifica che il piano determinato contiene sia la retta r data sia la retta s che – a sua volta- contiene il punto A.
Nel caso dell' esempio si può, quindi, asserire che:

$$(A \in \alpha)$$

perché

$$(A \in s \in \alpha)$$

Risultato

Compiuta la verifica con esito positivo, si possono assumere le tracce del piano come gli elementi geometrici rappresentativi del piano passante per la retta assegnata r ed il punto $A \notin r$.

$$\alpha \subset [r;\ (A \notin r)]$$

In questo caso dallo studio delle tracce del piano possiamo risalire, poi, alla tipologia descrittiva del piano che si caratterizza come "**piano generico nel primo diedro**" avente le seguenti caratteristiche geometrico-descrittive:

$$\alpha\ (\angle\pi^{+}_{1}\ \angle\pi^{+}_{2})$$

risolvendo, così, il problema grafico-descrittivo proposto.

ESERCITAZIONI GRAFICHE

Seguono due applicazioni grafiche con differenti tipologie di elementi geometrici

ESERCIZIO N° 1 – Piano per retta generica nel I diedro e punto nel IV diedro

Esercizio 1 - Dati

Siano assegnati una retta generica $r(r'; r''; T_1r; T_2r)$ nel primo diedro

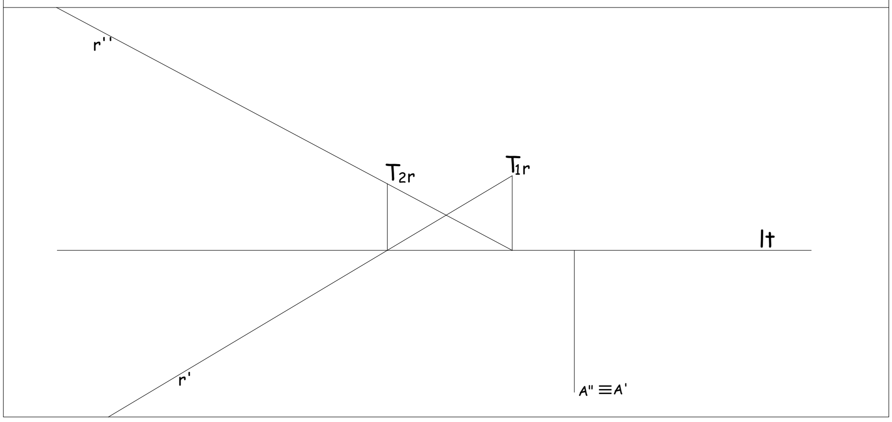
$$r \begin{cases} r' \\ r'' \\ T_1r \\ T_2r \end{cases}$$

ed un punto $A(A' \equiv A'')$ nel quarto diedro.

$$A \begin{cases} A' \\ A'' \end{cases}$$

$[A' \equiv A'']$ significa che il valore numerico della quota e il valore numerico dell'aggetto sono uguali.

Dati la retta generica r ed il punto A(A';A") determinare il piano α passante per essi



Esercizio 1 – Passaggio 1

Ricordando che una retta è generata da

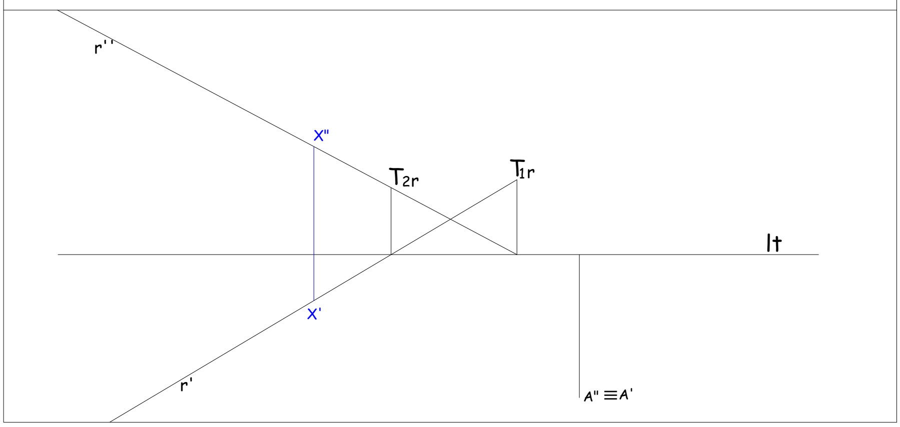
$$r = \sum_{-\infty}^{\to+\infty} \left\{ \overline{\overline{X}} \right\}$$

si sceglie, a piacimento, un punto $(X \in r)$ tale che sia:

$$(X \in r) \begin{cases} \nearrow (X' \in r') \\ \searrow (X'' \in r'') \end{cases}$$

Dati la retta generica r ed il punto A(A';A") determinare il piano α passante per essi

Passaggio 1 -Si definisce, anzitutto, un punto X∈r; (X'∈r'; X"∈r")



Esercizio 1- Passaggi 2 - 3

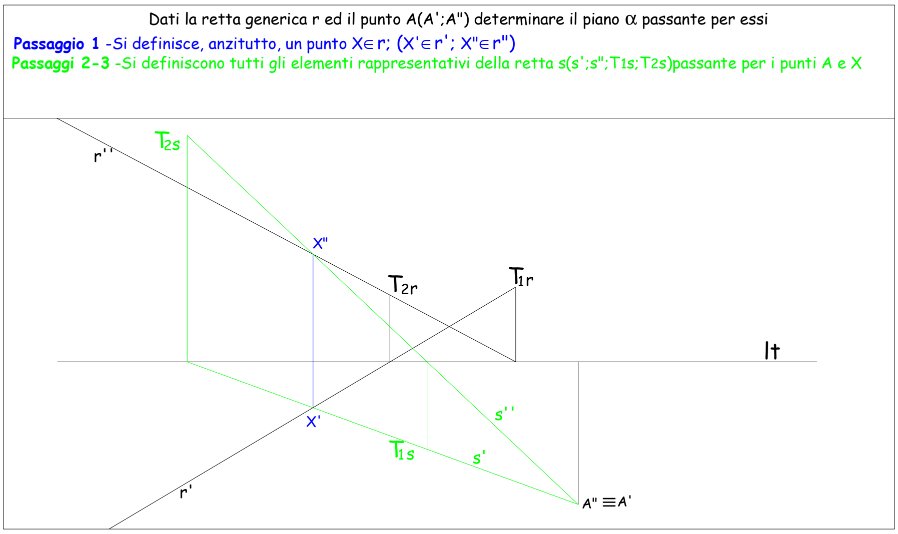
Si costruisce il segmento

$\overline{AX} \rightarrow \overline{A'X'}$

$\overline{AX} \rightarrow \overline{A''X''}$

Si estende, poi, il segmento convertendolo nella retta s della quale si definiscono tutti gli elementi rappresentativi: due proiezioni e due tracce

$(s'; s''; T_1s; T_2s)$



Esercizio 1-Passaggi 4-5-6

Dopo aver collegato le due prime tracce ($T_1r + T_1s$) e le due seconde tracce ($T_2r + T_2s$), si estendono questi segmenti trasformandoli in rette che essendo costituite da:

$$t_{1\alpha} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \overline{\overline{T_{1r}}} \right\}$$

$$t_{2\alpha} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \overline{\overline{T_{2r}}} \right\}$$

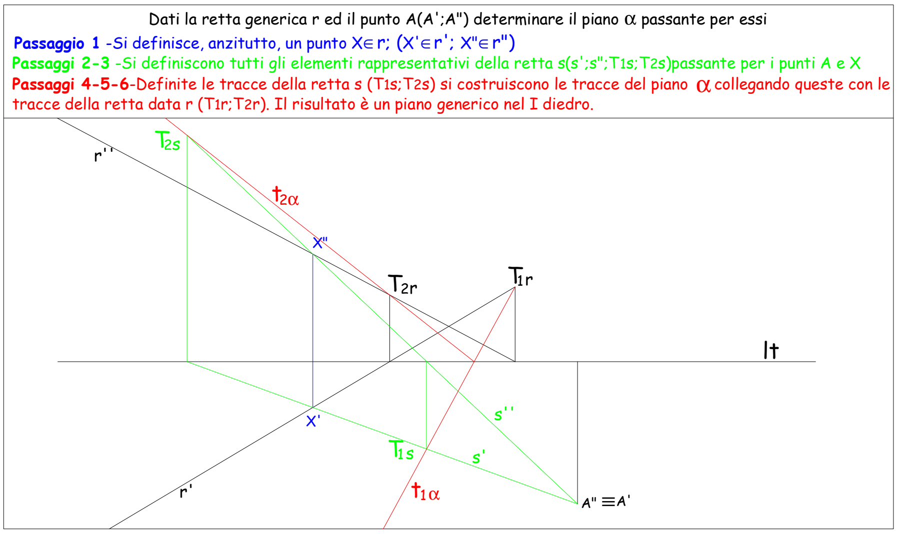
identificano il piano α

$\overline{T_1r + T_1s} \rightarrow t_1\alpha$

$\overline{T_2r + T_2s} \rightarrow t_2\alpha$

passante per la retta r ed il punto ($A \notin r$).

Poiché le due rette (tracce del piano) si intersecano sulla lt nel medesimo punto determinano il piano che passa per i due elementi assegnati



Verifiche

La verifica grafica, eseguita mediante la condizione di appartenenza, risulta essere congruente sia con il problema geometrico (piano per una retta ed un punto ad essa non appartenente), sia con l'aspetto descrittivo (ricerca del tipo di piano), sia con l'aspetto rappresentativo (determinazione delle tracce del piano).

I due elementi assegnati r ed A, infatti, appartengono al piano perché per il punto A passa la retta s che interseca la retta r nel punto X comune alle due rette. Di conseguenza restano verificate le seguenti due leggi dell'appartenenza.

$(A \in \alpha)$ perchè $(A \in s \in \alpha)$

Quindi resta completamente verificata la condizione:

$$\alpha \subset [r \cap s \subset (A \notin r)$$

Risultato

Dallo studio delle tracce del piano possiamo risalire, poi, alla tipologia descrittiva del piano che si caratterizza come "**piano generico nel primo diedro**" avente le seguenti caratteristiche geometrico-descrittive.

$$\alpha\ (\angle\pi^{+}{}_{1}\ \angle\pi^{+}{}_{2})$$

ESERCIZIO N° 2 Piano per retta frontale nel II diedro e punto nel III diedro

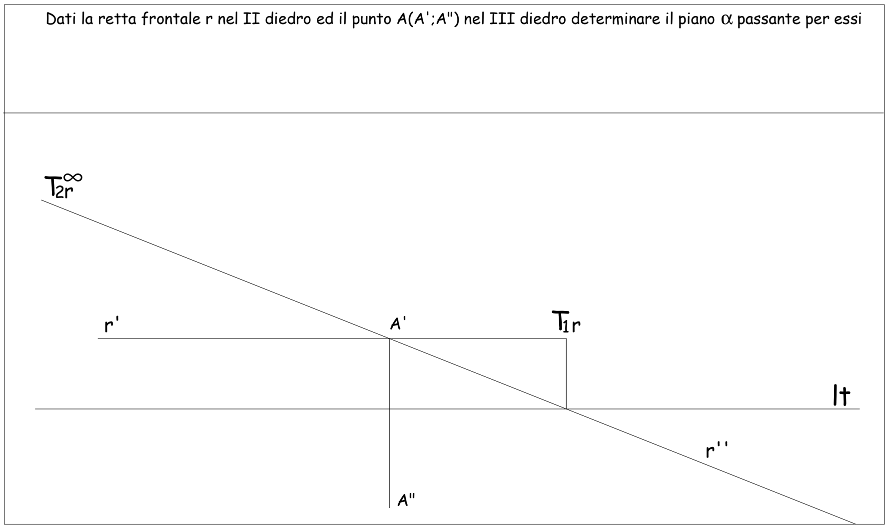
Esercizio 2 - Dati

Siano assegnate le proiezioni della retta frontale r(r'; r''; T_1r; T^{∞}_2r) collocata nello spazio del secondo diedro

$$r \begin{cases} r' \\ r'' \\ T_1 r \\ T^{\infty}_2 r \end{cases}$$

e del punto A(A'; A'') collocato nello spazio del terzo diedro.

$$A \begin{cases} A' \\ A'' \end{cases}$$



Fare attenzione alla ingannevole posizione della proiezione A' che, pur giacendo sulla proiezione r', non ha alcun legame con la retta data r.

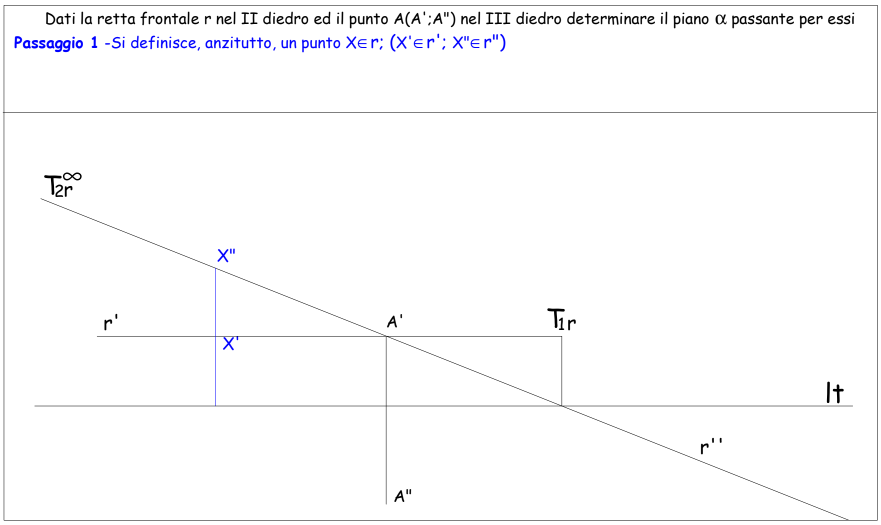
Esercizio 2 – Passaggio 1

Ricordando che una retta espressa come di seguito

$$\boxed{r = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overline{\overline{X}} \right\}}$$

è generata da un punto dinamico, si sceglie, a piacimento, un punto (X ∈ r) tale che sia:

$$(X \in r) \begin{cases} \nearrow (X' \in r') \\ \searrow (X'' \in r'') \end{cases}$$

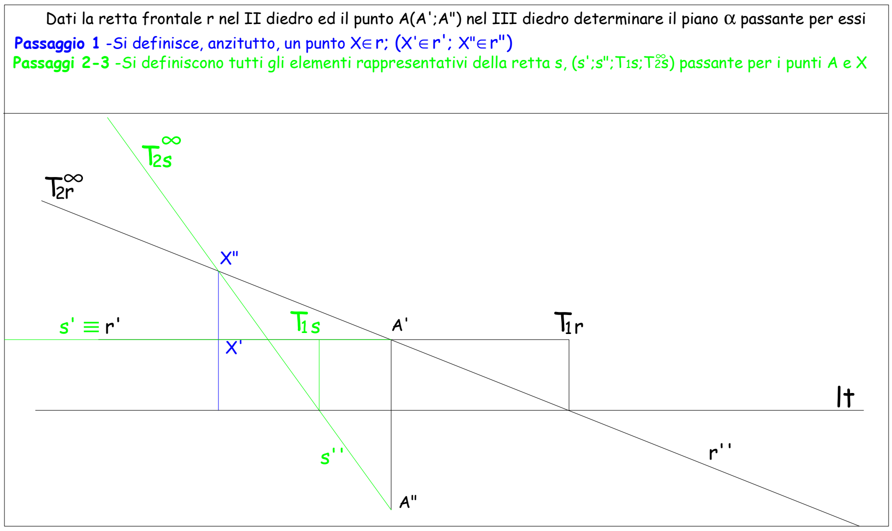


Esercizio 2- Passaggi 2-3

Dopo aver costruito il segmento AX(A'X'; A"X") si estende lo stesso trasformandolo nella retta s della quale si definiscono tutti gli elementi rappresentativi:

$$(s'; s''; T_1s; T^{\infty}{}_2s)$$

Si annota come ($T^{\infty}{}_2s$) sia una traccia impropria perché la retta s si caratterizza anche essa come retta frontale.



Esercizio 2 – Passaggi 4-5-6

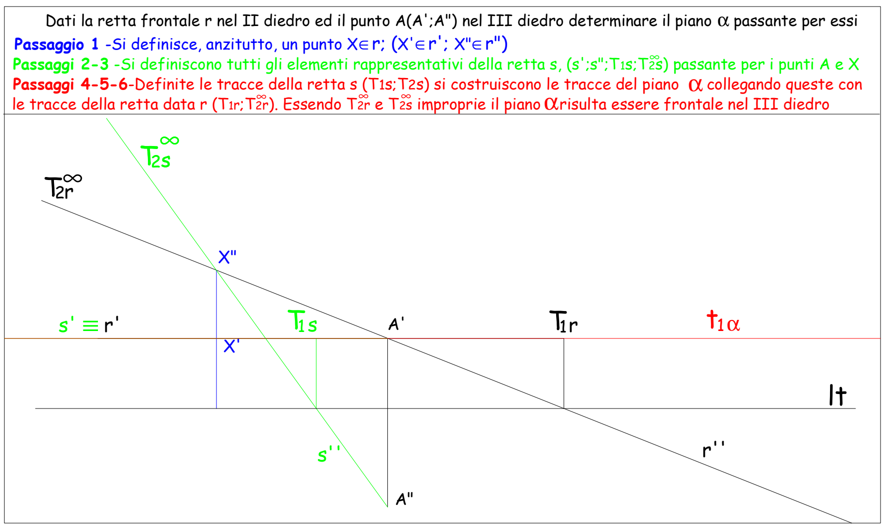
Si collegano, quindi, le prime due tracce (T_1r + T_1s). Estendendo questo segmento si definisce la $t_1\alpha$.

Le tracce ($T^{\infty}{}_2r$) e ($T^{\infty}{}_2s$), essendo punti impropri, evidenziano che le rette r ed s sono parallele a π_2.

Pertanto sommando ($T^{\infty}{}_2r$ + $T^{\infty}{}_2s$) si ottiene un segmento improprio che esteso genera la traccia ($t^{\infty}{}_2\alpha$) impropria del piano α.

La presenza di ($t^{\infty}{}_2\alpha$) significa che la retta traccia del piano non interseca il piano di proiezione π_2 per cui rimarrà ad esso parallela.

Da ciò si evince che essendo la traccia seconda del piano impropria, il tipo di piano risultante sarà un piano frontale (parallelo a π_2) nel secondo e terzo diedro.



Verifiche
La verifica grafica, eseguita mediante la condizione di appartenenza, risulta essere congruente sia con il problema geometrico (piano per una retta ed un punto ad essa non appartenente), sia con l'aspetto descrittivo (ricerca del tipo di piano), sia con l'aspetto rappresentativo (determinazione delle tracce del piano). I due elementi assegnati r ed A, infatti, appartengono al piano perché per il punto A passa la retta s che interseca la retta r nel punto X comune alle due rette. Di conseguenza restano verificate le seguenti due leggi dell'appartenenza. $(A \in \alpha)$ perchè $(A \in s \in \alpha)$ Quindi resta completamente verificata la condizione: $\alpha \subset [r \cap s \subset (A \notin r)]$
Risultato
Dallo studio delle tracce del piano possiamo risalire, poi, alla tipologia descrittiva del piano che si caratterizza come "**piano frontale passante nel secondo e terzo diedro**" avente le seguenti caratteristiche geometrico-descrittive. $\alpha \, (\perp \pi^{-}_{1} \; // \; \pi^{+-}_{2})$

Elio Fragassi
http://www.webalice.it/eliofragassi