ALGORITMO GRAFICO PER LE RICERCA DEL PIANO PASSANTE PER UNA RETTA ED UN PUNTO AD ESSA NON APPARTENENTE

b. Ricerca impostata sul parallelismo tra due rette

Siano assegnati i seguenti elementi geometrici: una retta r ed un punto P ad essa non appartenente per i quali condurre un piano α.

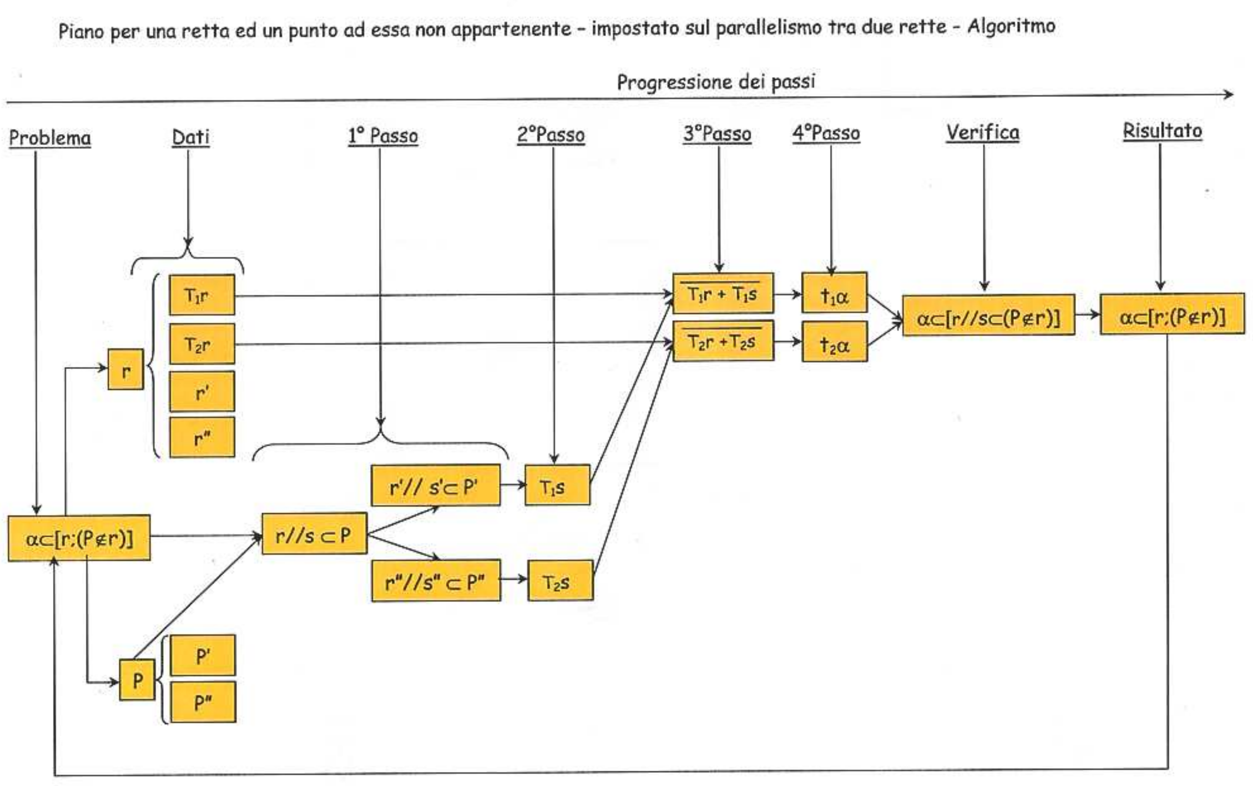
Avendo necessità di definire le quattro tracce (punti) di due rette e avendo a disposizione una retta solamente, si pone il problema di come individuare, tra le infinite rette di una stella avente il punto P come centro, una seconda retta passante per il punto assegnato e in grado di contribuire alla risoluzione del problema geometrico-descrittivo.

Allora tra le infinite rette della stella se ne sceglie, a piacere, una che sia parallela alla retta assegnata. In questo modo si ricade nella procedura, già analizzata, della ricerca di un piano passante per due rette parallele. Così operando a conclusione della procedura deve verificarsi quanto di seguito:

$\alpha \subset [r // s \subset (P \notin r)]$ e quindi $\alpha \subset [r ; (P \notin r)]$

Assegnati, quindi, la retta r ed il punto P ad essa non appartenente il problema si risolve mediante i passi sintetizzati nello schema del relativo algoritmo grafico sottostante.

Algoritmo grafico



Sviluppo dell'algoritmo	Operazioni grafiche relative

Dati

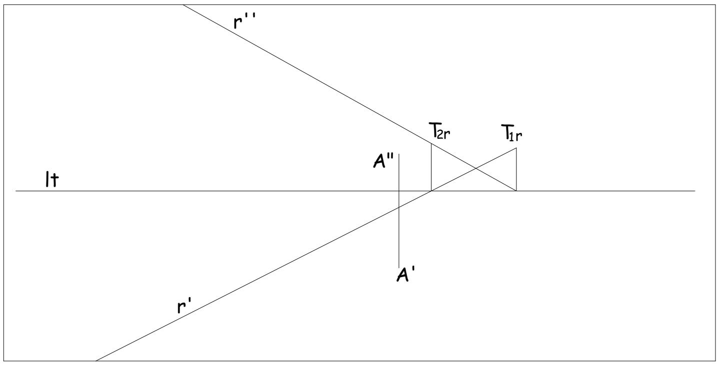
Siano assegnati la retta generica r analizzata nel secondo diedro ($T1r$= negativo)

r(r'; r"; $-T_1r$; T_2r)

r: r' ; r" ; $-T_1r$; T_2r

ed il punto $A \notin r$ collocato nello spazio del primo diedro.

A: A' ; A"

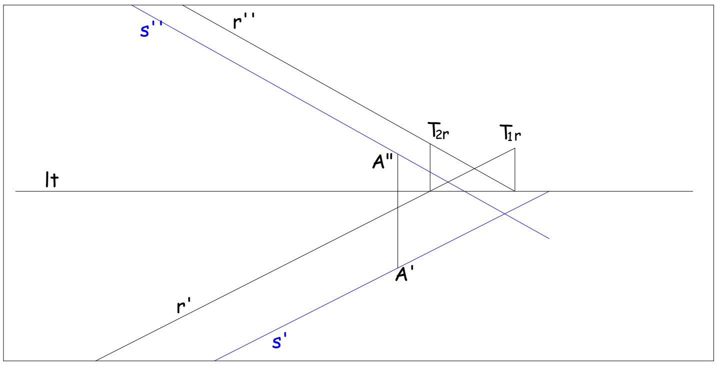


Primo passo

Tra le infinite rette della stella, passanti per il punto A(A'; A"), si sceglie l'unica retta s(s',s") che applicata nel punto dato si disponga parallela alla retta data rispondendo alla seguente formalizzazione:

$r // s \subset A \rightarrow r' // s' \subset A'$

$r // s \subset A \rightarrow r'' // s'' \subset A''$

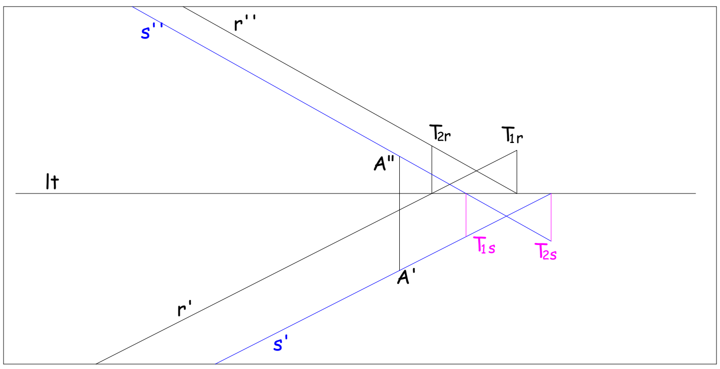


Secondo passo

Poiché, dal punto di vista descrittivo, una retta è univocamente definita quando si conoscono sia le proiezioni sia le tracce della retta stessa; si completa la rappresentazione della retta s(s'; s") presentata mediante le proiezioni ricercandone le due tracce T_1s e T_2s:

$s' \rightarrow T_1s$

$s'' \rightarrow T_2s$

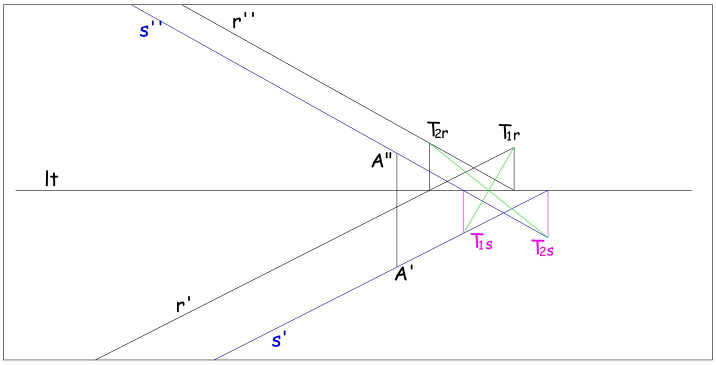


Terzo passo

Ottenute le tracce (che dal punto di vista geometrico sono punti reali) della retta s si collegano le due tracce prime delle rette r ed s per ottenere un segmento di retta che definisce la direzione della $t_1\alpha$ su π_1 e le due seconde tracce delle rette r ed s per ottenere un segmento di retta che determina la direzione della $t_2\alpha$ su π_2

$$\overline{T_1r + T_1s}$$

$$\overline{T_2r + T_2s}$$



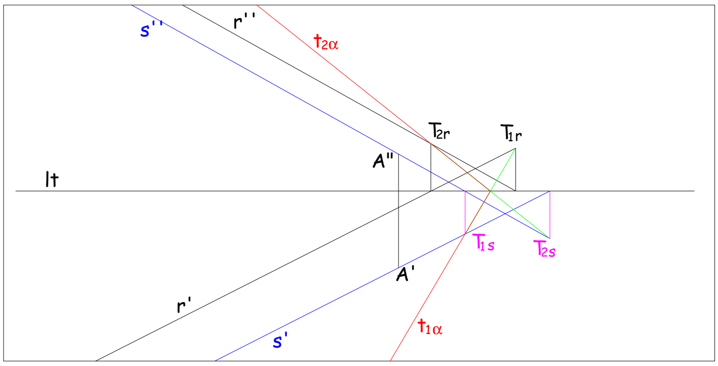
Quarto passo

Poiché le tracce del piano ($t_1\alpha$) e ($t_2\alpha$) sono rette reali ottenute come

$$t_{1\alpha} = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overline{\overline{T_{1r}}} \right\} \qquad t_{2\alpha} = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overline{\overline{T_{2r}}} \right\}$$

estendendo all'infinito i segmenti così ottenuti si determinano la tracce del piano α come:

$t_1\alpha$ $\quad$ $t_2\alpha$



Verifiva

Determinate le tracce rappresentative del piano e controllato che sia un punto unito alla lt o un punto improprio, è necessario eseguire la verifica mediante la legge della contenenza che lega i tre elementi: la retta r, il punto A e la retta s rispettando il passo di verifica che vuole

$$\alpha \subset [r//s \subset (P \notin r)]$$

Si verifica che il piano contiene sia la retta r data sia la retta s che contiene, a sua volta, il punto P.
Quindi, nel caso in esame si ha:

$$(A \in \alpha) \text{ perché } (A \in s \in \alpha)$$

Risultato

Compiuta la verifica con esito positivo, si possono assumere le tracce del piano come gli elementi geometrici rappresentativi del piano passante per la retta assegnata r ed il punto $A \notin r$.

$$\alpha \subset [r;\ (A \notin r)]$$

In questo caso per la retta r ed il punto A passa un piano generico collocato nel primo diedro che può essere descritto in questo modo:

$$\alpha\ (\angle\pi^+{}_1\ \angle\pi^+{}_2)$$

ESERCITAZIONI GRAFICHE

Seguono due applicazioni grafiche con differenti tipologie di elementi geometrici

ESERCIZIO N° 1 – Piano per una retta generica ed punto entrambi nel I diedro

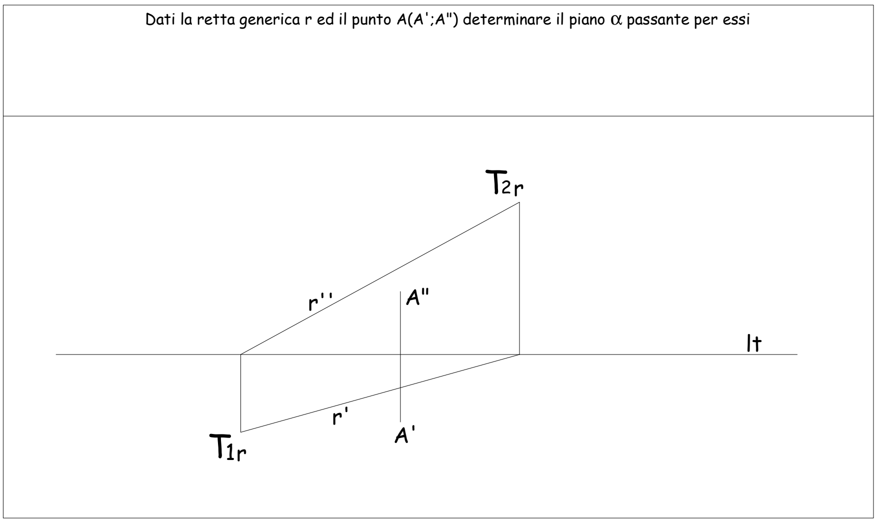
Esercizio 1 - Dati

Siano assegnati una retta generica $r(r'; r''; T_1r; T_2r)$ nel primo diedro

$$r \begin{cases} r' \\ r'' \\ T_1r \\ T_2r \end{cases}$$

ed un punto $A(A'; A'')$ nel primo diedro.

$$A \begin{cases} A' \\ A'' \end{cases}$$

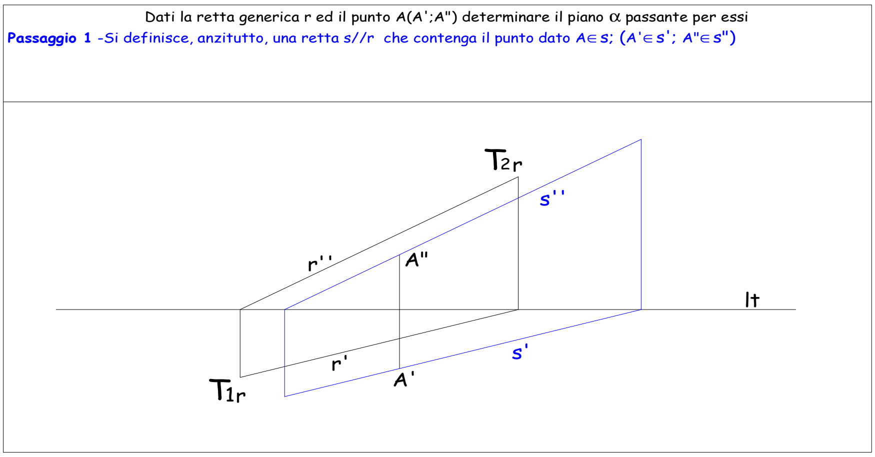


Esercizio 1 – Passaggio 1

Per il punto $A(A'; A'')$ non appartenente alla retta r si conduce la retta s//r, cioè tale che sia:

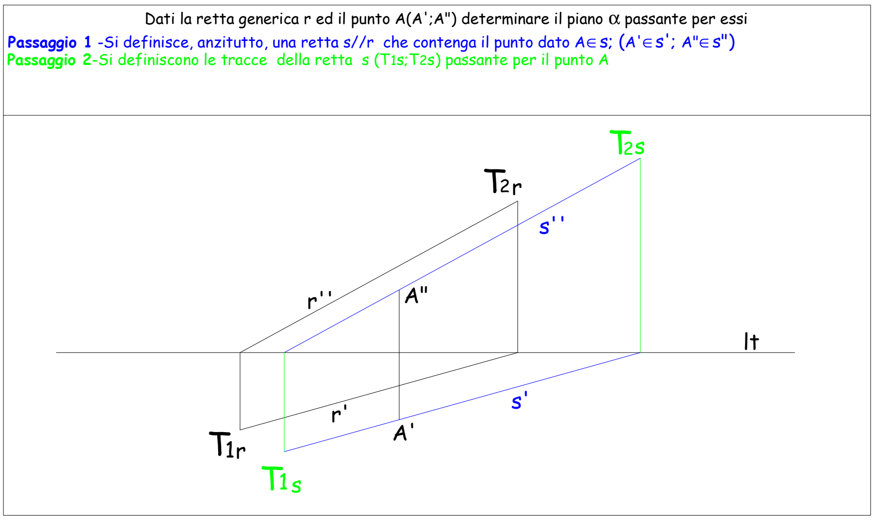
$r//s \subset A$ → $r'// s' \subset A'$

$r//s \subset A$ → $r''//s'' \subset A''$



Esercizio 1- Passaggio 2

Per completare la rappresentazione descrittiva della retta s si definiscono anche le relative tracce. Quindi partendo dai piedi delle tracce (intersezioni delle proiezioni s' ed s'' con la lt) si definiscono le due tracce della retta s, T_1s e T_2s, geometricamente punti reali.

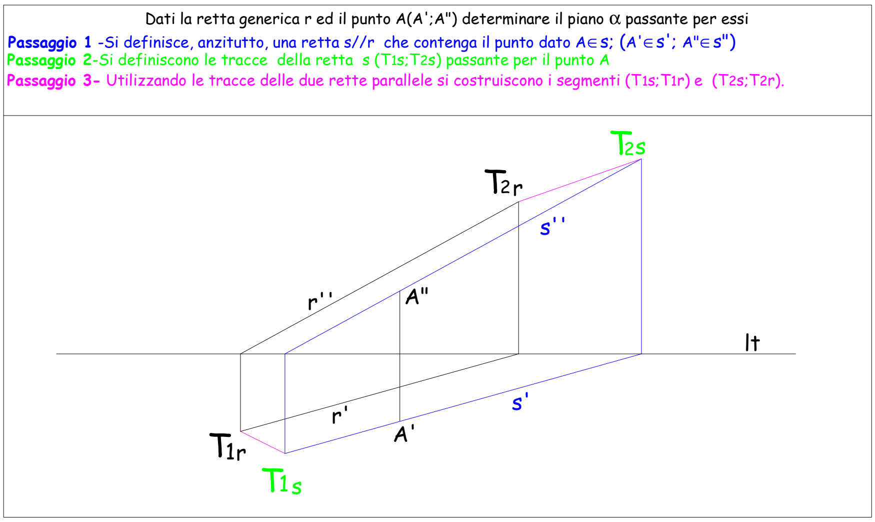


Esercizio 1-Passaggio 3

Determinate le tracce (che dal punto di vista geometrico sono punti reali) della retta s si collegano le due tracce prime delle rette r ed s per ottenere un segmento di retta che definisce la direzione della $t_1\alpha$ su π_1 e le due seconde tracce delle rette r ed s per ottenere un segmento di retta che determina la direzione della $t_2\alpha$ su π_2.

$\overline{T_1r + T_1s}$

$\overline{T_2r + T_2s}$



Esercizio 1- passaggio 4

Poiché le tracce del piano ($t_1\alpha$) e ($t_2\alpha$) sono rette reali ottenute come:

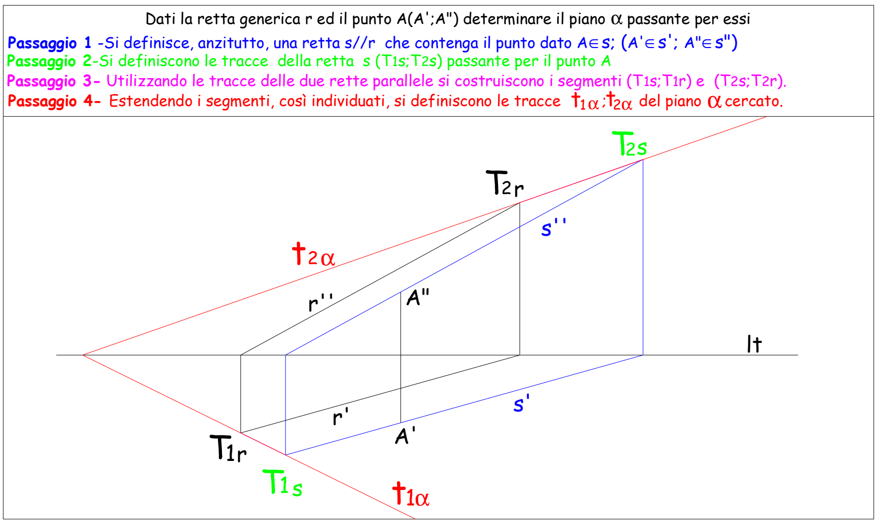
$$t_{1\alpha} = \sum_{-\infty}^{\to +\infty} \left\{ \overline{\overline{T_{1r}}} \right\}$$

$$t_{2\alpha} = \sum_{-\infty}^{\to +\infty} \left\{ \overline{\overline{T_{2r}}} \right\}$$

estendendo all'infinito i segmenti così ottenuti si determinano la tracce del piano α come

$t_1\alpha$ $t_2\alpha$

Le due rette (tracce del piano) si intersecano sulla lt nel medesimo punto determinando un piano generico nel primo diedro.



Verifiche

La verifica grafica, eseguita mediante la condizione di appartenenza, risulta essere congruente sia con il problema geometrico (piano per una retta ed un punto ad essa non appartenente), sia con l'aspetto descrittivo (ricerca del tipo di piano), sia con l'aspetto rappresentativo (determinazione delle tracce del piano).

I due elementi assegnati r ed A, infatti, appartengono al medesimo piano perché per il punto A passa la retta s che viene determinata parallela alla retta r . Di conseguenza restano verificate le seguenti due leggi dell'appartenenza.

$(A \in \alpha)$ perchè $(A \in s \in \alpha)$

Quindi essendo completamente verificate entrambe le condizioni geometriche dell'appartenenza e del parallelismo:

$$\alpha \subset [r//s \subset (P \notin r)]$$

possiamo asserire che il piano identificato è la risoluzione del problema descrittivo.

$$\alpha \subset [r; (A \notin r)]$$

Risultato

Dallo studio delle tracce del piano possiamo risalire, poi, alla tipologia descrittiva del piano identificato che si caratterizza, nel caso specifico, come "**piano generico nel primo diedro**" avente le seguenti caratteristiche geometrico-descrittive.

$$\alpha\ (\angle\pi^{+}_{1}\ \angle\pi^{+}_{2})$$

ESERCIZIO N° 2- Piano per una retta generica nel II diedro ed punto nel I diedro

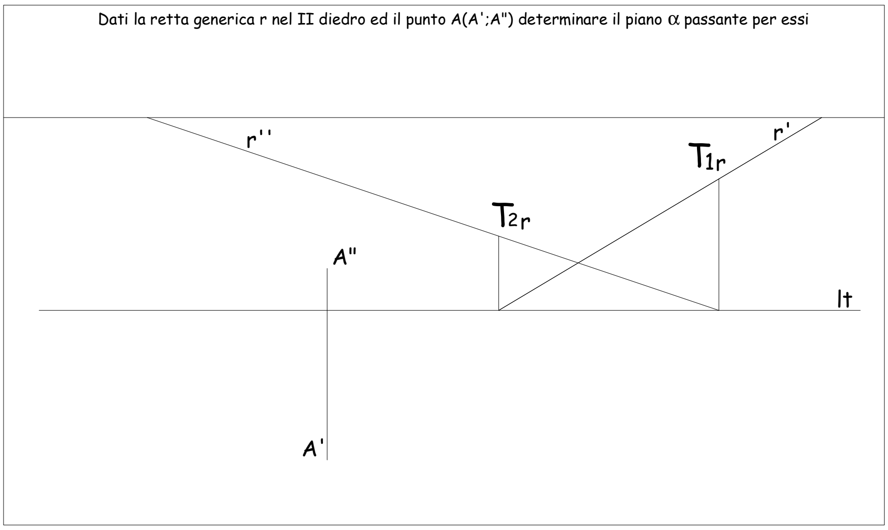
Esercizio 2 - Dati

Siano assegnate le proiezioni della retta generica r(r'; r''; -T_1r; T_2r) nel secondo diedro

r: r' ; r'' ; -T_1r ; T_2r

e del punto A(A'; A'') collocato nel primo diedro.

A: A' ; A''

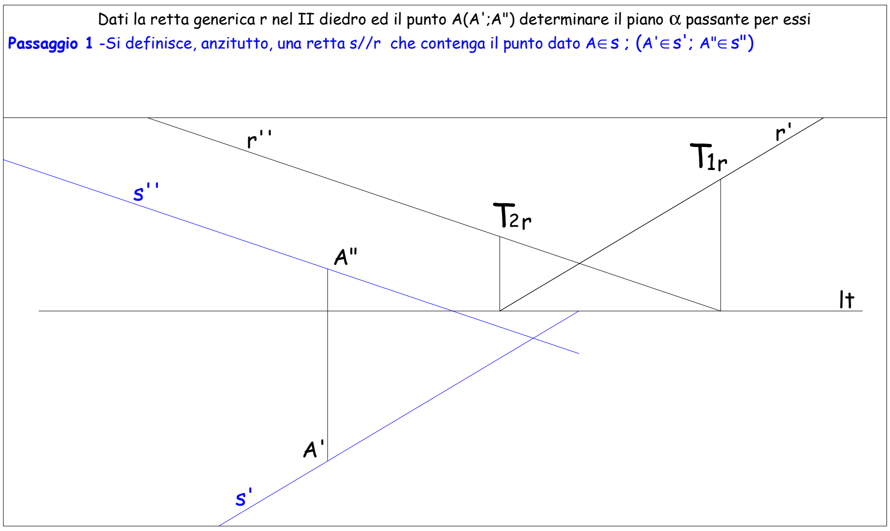


Esercizio 2 – Passaggio 1

Per il punto A(A'; A'') non appartenente alla retta r si conduce la retta s//r, cioè tale che sia:

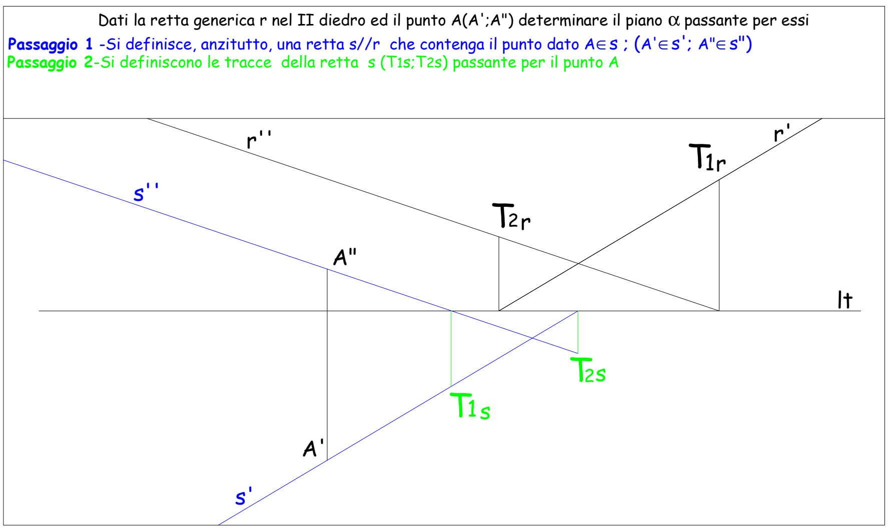
r//s ⊂ A → r'// s' ⊂ A'

r//s ⊂ A → r''//s'' ⊂ A''



Esercizio 2- Passaggio 2

Per completare la rappresentazione descrittiva della retta s si definiscono anche le relative ttracce. Quindi partendo dai piedi delle tracce (intersezioni delle proiezioni s' ed s'' con la lt) si definiscono le due tracce della retta s, T_1s e T_2s, geometricamente punti reali

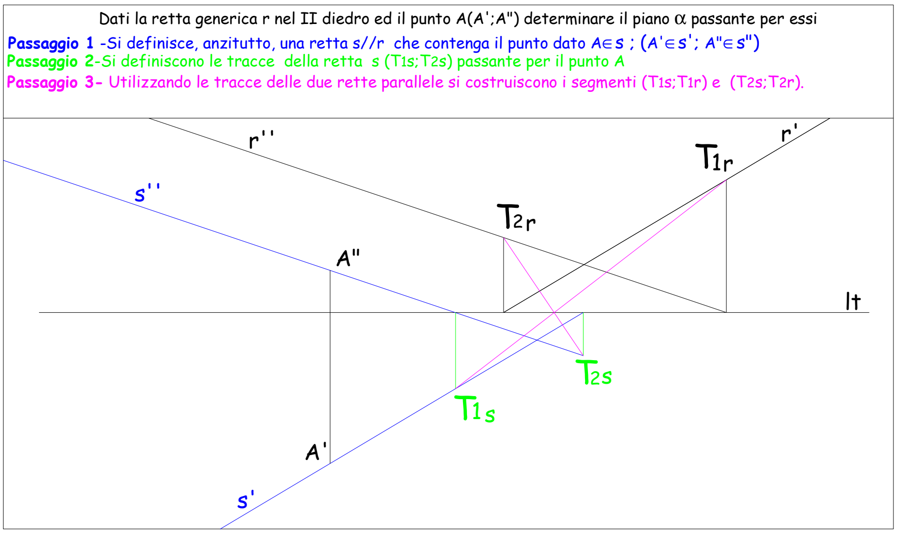


Esercizio 2 – Passaggio 3

Determinate le tracce (che dal punto di vista geometrico sono punti reali) della retta s si collegano le due tracce prime delle rette r ed s per ottenere un segmento di retta che definisce la direzione della $t_1\alpha$ su π_1 e le due seconde tracce delle rette r ed s per ottenere un segmento di retta che determina la direzione della $t_2\alpha$ su π_2

$$\overline{T_{1}r + T_{1}s}$$

$$\overline{T_{2}r + T_{2}s}$$



Esercizio 2 – Passaggio 4

Poiché le tracce del piano ($t_1\alpha$) e ($t_2\alpha$) sono rette reali ottenute come:

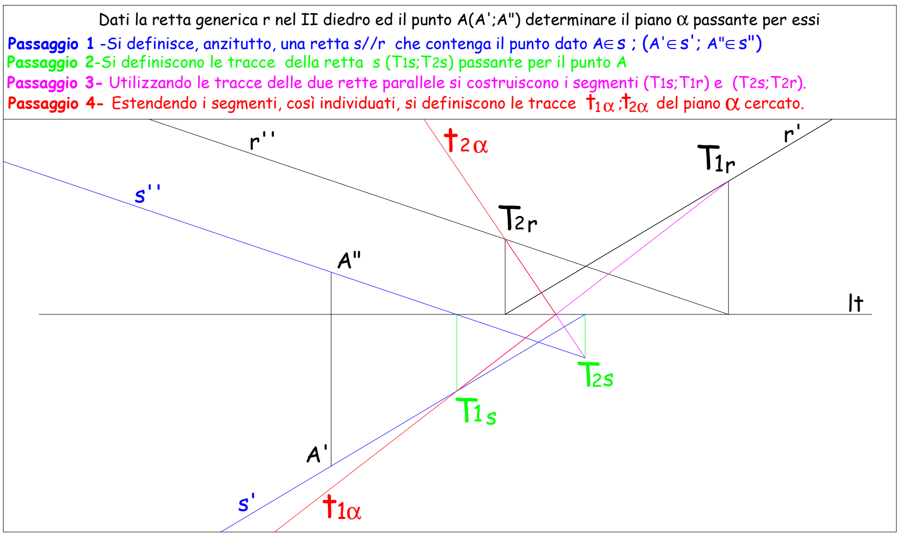
$$t_{1\alpha} = \sum_{-\infty}^{\to+\infty} \left\{ \overline{\overline{T_{1r}}} \right\}$$

$$t_{2\alpha} = \sum_{-\infty}^{\to+\infty} \left\{ \overline{\overline{T_{2r}}} \right\}$$

estendendo all'infinito i segmenti così ottenuti si determinano la tracce del piano α come

$t_1\alpha$ $t_2\alpha$

Le due rette (tracce del piano) si intersecano sulla lt nel medesimo punto determinando un piano generico nel primo diedro.



Verifiche

La verifica grafica, eseguita mediante la condizione di appartenenza, risulta essere congruente sia con il problema geometrico (piano per una retta ed un punto ad essa non appartenente), sia con l'aspetto descrittivo (ricerca del tipo di piano), sia con l'aspetto rappresentativo (determinazione delle tracce del piano).

I due elementi assegnati r ed A, infatti, appartengono al medesimo piano perché per il punto A passa la retta s che viene determinata parallela alla retta r . Di conseguenza restano verificate le seguenti due leggi dell'appartenenza.

$(A \in \alpha)$ perchè $(A \in s \in \alpha)$

Quindi essendo completamente verificate entrambe le condizioni geometriche dell'appartenenza e del parallelismo:

$$\alpha \subset [r // s \subset (P \notin r)]$$

possiamo asserire che il piano identificato ci fornisce la risoluzione del problema descrittivo proposto.

$$\alpha \subset [r; (A \notin r)]$$

Risultato

Dallo studio delle tracce del piano possiamo risalire, poi, alla tipologia descrittiva del piano identificato che si caratterizza, nel caso specifico, come "**piano generico nel primo diedro**" avente le seguenti caratteristiche geometrico-descrittive.

$$\alpha\ (\angle \pi^{+}_{1}\ \angle \pi^{+}_{2})$$

Elio Fragassi
http://www.webalice.it/eliofragassi