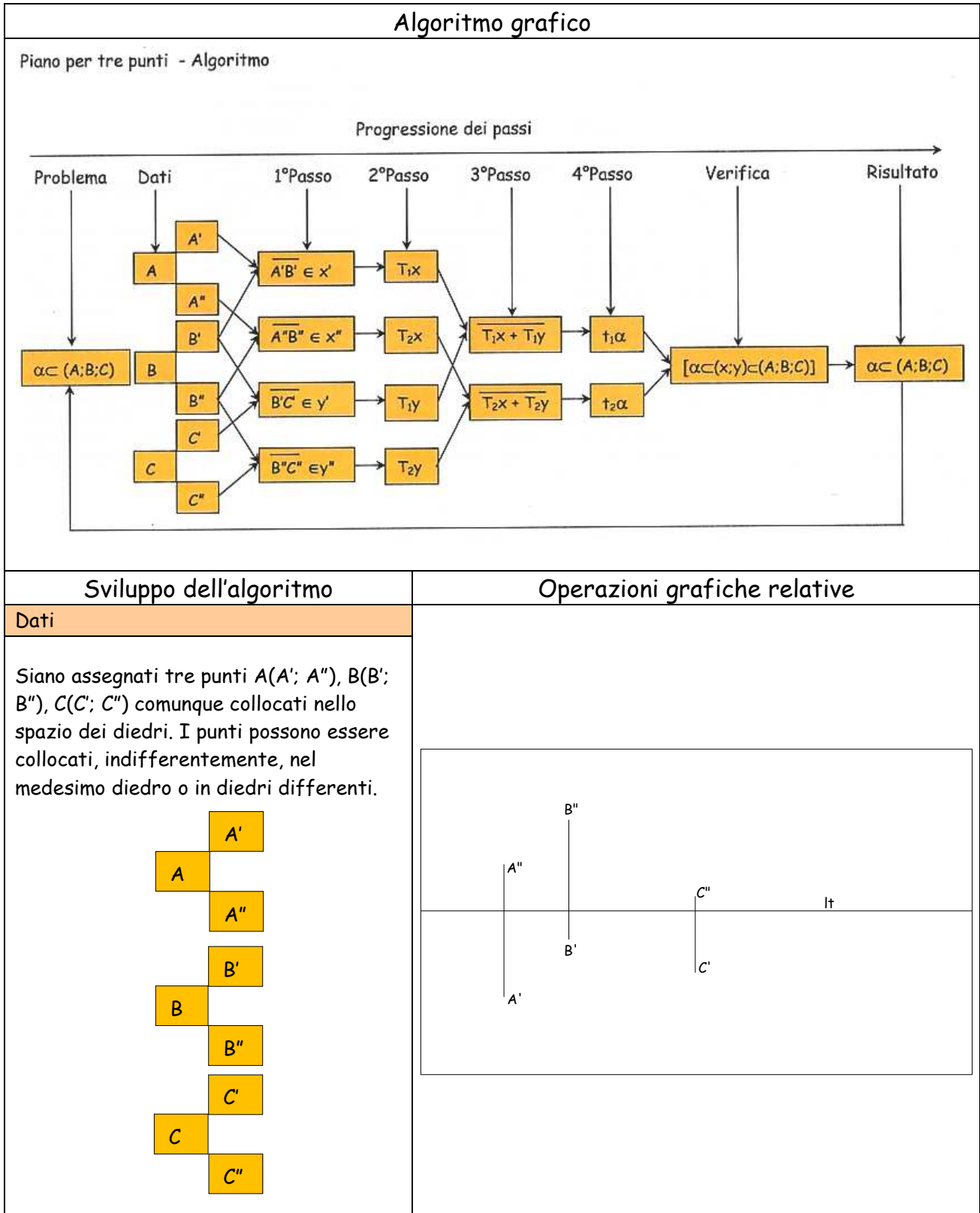


## PIANO PER TRE PUNTI NON ALLINEATI E NON COINCIDENTI

Perché i punti assegnati definiscano il piano, deve accadere che i punti appartengano al piano, quindi deve verificarsi, a conclusione della procedura, la seguente legge di appartenenza e/o relativa contenezza.



Assegnati, pertanto, tre punti comunque collocati nello spazio dei diedri, il problema si risolve sviluppando i passaggi sintetizzati nello schema sottostante del relativo algoritmo grafico.



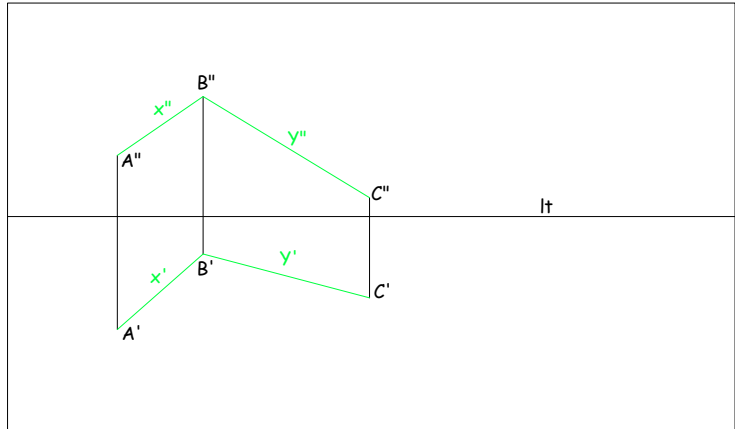
### Primo passo

Ricordando che per due punti, non coincidenti, passa una ed una sola retta, si definiscono per i punti assegnati due segmenti distinti appartenenti a due rette  $x$  ed  $y$ , secondo la legge di appartenenza, come di seguito esplicitato:

$$(\overline{AB} \in x); (\overline{BC} \in y)$$

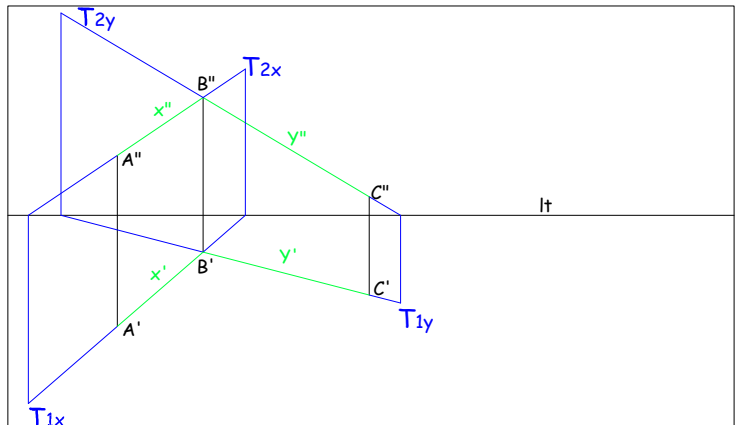
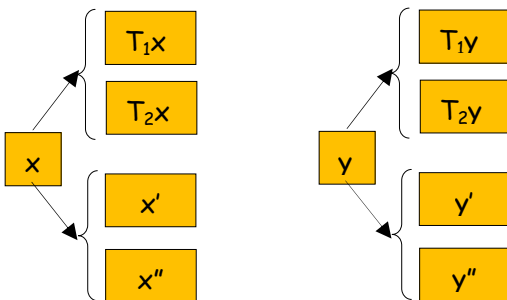
$$(\overline{AB} \in x) \quad \boxed{\overline{A'B'} \in x'} \quad \boxed{\overline{A''B''} \in x''}$$

$$(\overline{BC} \in y) \quad \boxed{\overline{B'C'} \in y'} \quad \boxed{\overline{B''C''} \in y''}$$



### Secondo passo

Estendendo i segmenti definiti mediante le proiezioni dei punti  $A, B, C$  assegnati (essi rappresentano gli estremi dei segmenti) si completa la rappresentazione delle rette  $x$  ed  $y$  definendone le tracce come di seguito.



### Passo terzo

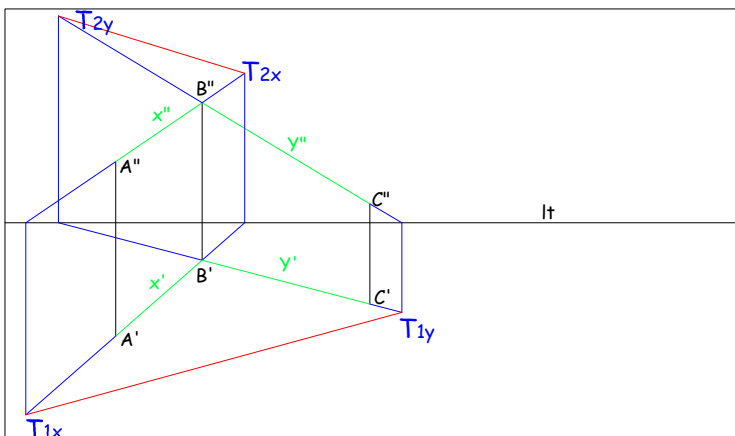
Poiché le tracce del piano ( $t_1\alpha$ ) e ( $t_2\alpha$ ) sono rette reali ottenute come:

$$t_{1\alpha} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \overline{T_{1r}} \right\} \quad t_{2\alpha} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \overline{T_{2r}} \right\}$$

sommando le due tracce prime e le due tracce seconde si definiscono due segmenti che identificano le direzioni delle tracce, del piano che si ricerca, sui piani di proiezione  $\pi_1$  e  $\pi_2$

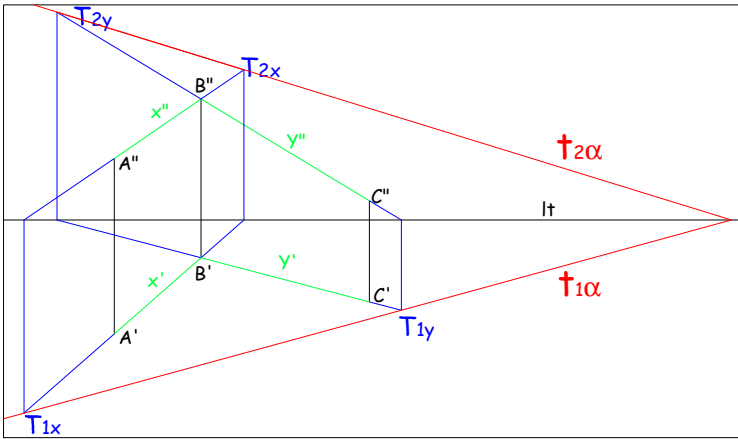
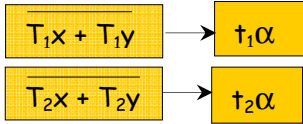
$$\boxed{\overline{T_{1x} + T_{1y}}}$$

$$\boxed{\overline{T_{2x} + T_{2y}}}$$



**Passo quarto**

Estendendo i segmenti, identificati al passo precedente, si determinano le due tracce del piano ( $t_1\alpha$  e  $t_2\alpha$ ) che intersecano la linea di terra (It) nel medesimo punto.



**Verifica**

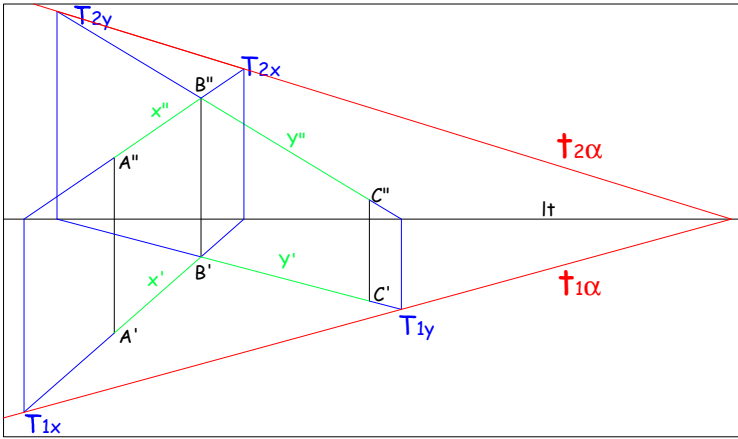
Definite le due tracce rappresentative del piano e controllato che si intersecano sulla  $It$  nel medesimo punto, è necessario effettuare la verifica mediante la legge della contenezza tra punto e piano espressa come di seguito:

$$\alpha \subset (x, y) \subset (A, B, C)$$

**Risultato**

Effettuata la verifica con esito positivo si possono assumere le tracce del piano come gli elementi geometrici rappresentativi del piano passante per i tre punti ( $A, B, C$ ) assegnati in quanto accade che:

$$\alpha \subset (A, B, C)$$



# ESERCITAZIONI GRAFICHE

Seguono due esemplificazioni grafiche con i punti collocati in differenti diedri ed assegnati mediante i valori di quota ed oggetto.

## ESERCIZIO N° 1 - Piano per tre punti in tre diedri diversi

### Esercizio 1 - Dati

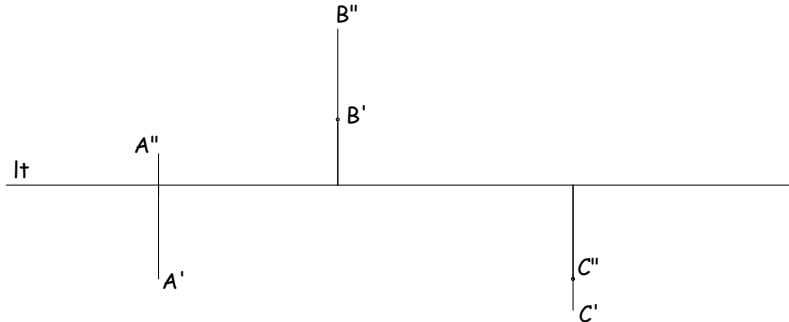
Siano assegnati i seguenti punti, nei differenti diedri, mediante i valori di quota ed oggetto.

Primo diedro  
 $A(A'=58,5; A''=30,0)$

Secondo diedro  
 $B(B'=-40,9; B''=97,5)$

Quarto diedro  
 $C(C'=78,0; C''=-58,5)$

Dati i punti  $A(A'=58,5; A''=30,0)$ ,  $B(B'=-40,9; B''=97,5)$ ,  $C(C'=78,0; C''=-58,5)$  determinare il piano  $\alpha$  passante per essi



### Esercizio 1 - Passaggio 1

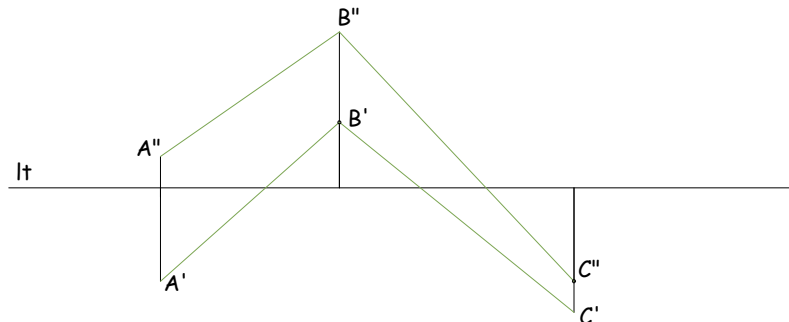
Si individuano due segmenti consecutivi aventi, ad esempio, il punto B in comune.

$\overline{AB(A'B'; A''B'')}$

$\overline{BC(B'C'; B''C'')}$

Dati i punti  $A(A'=58,5; A''=30,0)$ ,  $B(B'=-40,9; B''=97,5)$ ,  $C(C'=78,0; C''=-58,5)$  determinare il piano  $\alpha$  passante per essi

Passaggio 1 - Si definiscono le proiezioni dei due segmenti  $[(A'B'), (A''B'')]$  e  $[(B'C'), (B''C'')]$



### Esercizio 1 - Passaggi 2 e 3

Estendendo i segmenti si definiscono tutti gli elementi descrittivi delle rette che li contengono ed in particolare le tracce.

Per  $(AB \in r)$  si ha:

$[(A'B' \in r'); (A''B'' \in r'')]$

$[(T_1r \in r'); (T_2r \in r'')]$

Per  $(BC \in s)$  si ha:

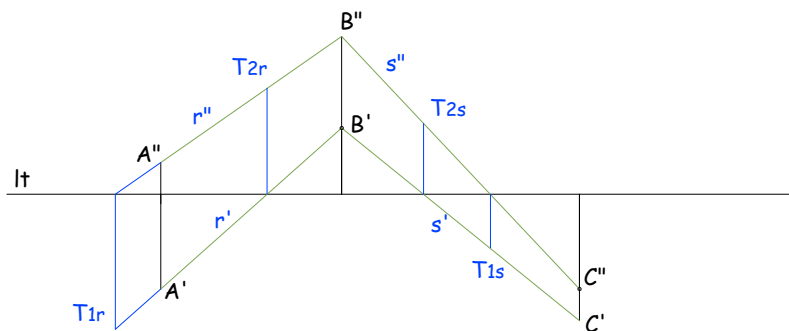
$[(B'C' \in s'); (B''C'' \in s'')]$

$[(T_1s \in s'); (T_2s \in s'')]$

Dati i punti  $A(A'=58,5; A''=30,0)$ ,  $B(B'=-40,9; B''=97,5)$ ,  $C(C'=78,0; C''=-58,5)$  determinare il piano  $\alpha$  passante per essi

Passaggio 1 - Si definiscono le proiezioni dei due segmenti  $[(A'B'), (A''B'')]$  e  $[(B'C'), (B''C'')]$

Passaggi 2 e 3 - Si definiscono le rette  $r$  ed  $s$  contenenti i segmenti e le relative tracce  $(T_1r, T_2r)$ ,  $(T_1s, T_2s)$



### Esercizio 1 - Passaggio 4

Con il passaggio precedente si individuano quattro tracce che, geometricamente, sono quattro punti reali.

Poiché per definire una retta sono necessari due punti distinti, collegando  $(T_{1r} + T_{1s})$  si determina  $t_{1\alpha}$ .

Allo stesso modo collegando  $(T_{2r} + T_{2s})$  si determina  $t_{2\alpha}$ . Le due rette (tracce del piano) devono intersecare la  $l_t$  nel medesimo punto (punto unito).

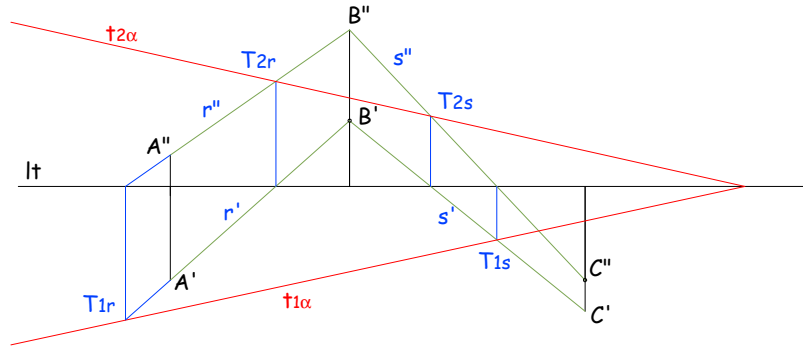
Il piano che si determina sulla base dei punti assegnati è un piano generico nel primo diedro espresso in forma descrittiva come segue:  
 $\alpha (\angle \pi_1^+ \angle \pi_2^-)$

Dati i punti  $A(A' = 58,5; A'' = 30,0)$ ,  $B(B' = -40,9; B'' = 97,5)$ ,  $C(C' = 78,0; C'' = -58,5)$  determinare il piano  $\alpha$  passante per essi

Passaggio 1 - Si definiscono le proiezioni dei due segmenti  $[(A'B'), (A''B'')] e [(B'C'), (B''C'')]$

Passaggi 2 e 3 - Si definiscono le rette  $r$  ed  $s$  contenenti i segmenti e le relative tracce  $(T_{1r}, T_{2r}), (T_{1s}, T_{2s})$

Passaggio 4 - Si definiscono le tracce del piano  $t_{1\alpha}$   $t_{2\alpha}$  passanti per le tracce delle due rette  $r$  ed  $s$



### Verifica

La verifica grafica, effettuata mediante le condizioni di appartenenza, risulta congruente sia con il problema geometrico (piano per tre punti) sia con il fine descrittivo (ricerca del piano) che con l'aspetto rappresentativo (definizione delle tracce).

Le due rette ( $r$  ed  $s$ ), infatti, appartengono al piano perché le rispettive tracce (punti reali) stanno sulle tracce del piano (rette reali) e i punti assegnati appartengono alle rette in quanto le proiezioni degli stessi stanno sulle rispettive proiezioni delle rette.

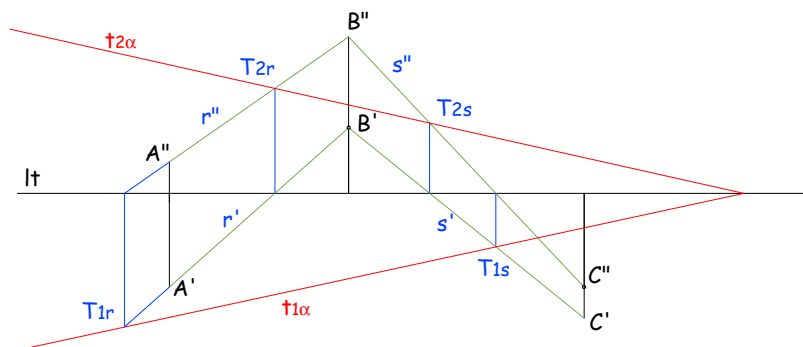
Quindi possiamo sintetizzare che  $(A, B, C) \in (r, s) \in \alpha$  e pertanto poiché  $(A, B, C) \in \alpha$

Dati i punti  $A(A' = 58,5; A'' = 30,0)$ ,  $B(B' = -40,9; B'' = 97,5)$ ,  $C(C' = 78,0; C'' = -58,5)$  determinare il piano  $\alpha$  passante per essi

Passaggio 1 - Si definiscono le proiezioni dei due segmenti  $[(A'B'), (A''B'')] e [(B'C'), (B''C'')]$

Passaggi 2 e 3 - Si definiscono le rette  $r$  ed  $s$  contenenti i segmenti e le relative tracce  $(T_{1r}, T_{2r}), (T_{1s}, T_{2s})$

Passaggio 4 - Si definiscono le tracce del piano  $t_{1\alpha}$   $t_{2\alpha}$  passanti per le tracce delle due rette  $r$  ed  $s$



,il piano passa per i tre punti  
(A, B, C) assegnati.

### Risultato

Dallo studio delle tracce del piano possiamo risalire, poi, alla tipologia descrittiva del piano che risulta essere un "piano generico nel primo diedro" con le seguenti caratteristiche geometrico-descrittive:

$$(\angle \pi_1^+ \angle \pi_2^+)$$

## ESERCIZIO N° 2- Piano per tre punti in tre diversi diedri

### Esercizio 2 - Dati

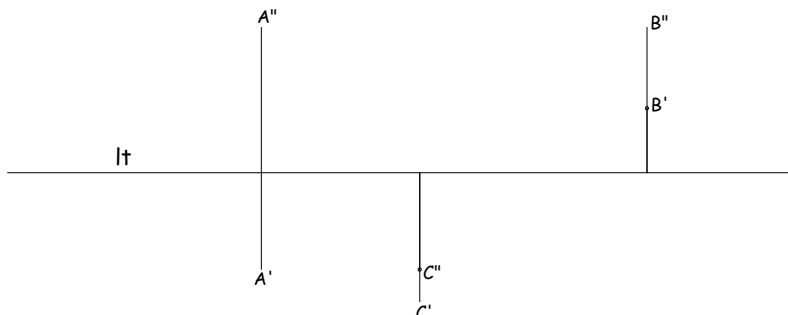
Siano assegnati i seguenti punti  $A(A'; A'')$ ,  $B(B'; B'')$ ,  $C(C'; C'')$  nei differenti diedri, mediante i valori di quota ed aggetto.

Primo diedro  
 $A(A'=60; A''=90)$

Secondo diedro  
 $B(B'=-40; B''=90)$

Quarto diedro  
 $C(C'=80; C''=-60)$

Dati i punti  $A(A'=60,0;A''=90,0)$ ,  $B(B'=-40,0;B''=90,0)$ ,  $C(C'=80,0;C''=-60,0)$  determinare il piano  $\alpha$  passante per essi



### Esercizio 2 - Passaggio 1

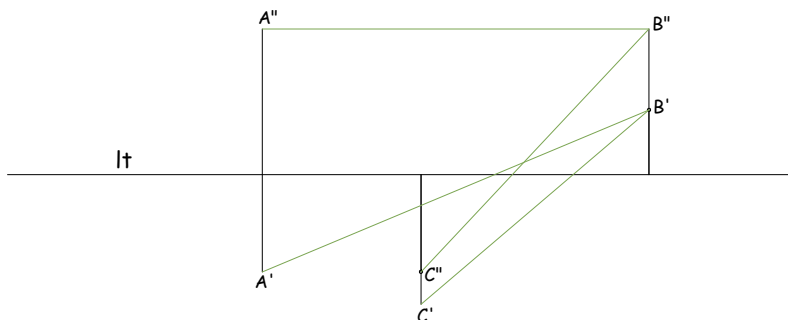
Si individuano due segmenti consecutivi aventi, ad esempio, il punto B in comune.

$\overline{AB(A'B'; A''B'')}$

$\overline{BC(B'C'; B''C'')}$

Dati i punti  $A(A'=60,0;A''=90,0)$ ,  $B(B'=-40,0;B''=90,0)$ ,  $C(C'=80,0;C''=-60,0)$  determinare il piano  $\alpha$  passante per essi

Passaggio 1 - Si definiscono le proiezioni dei due segmenti  $[(A'B'), (A''B'')]$  e  $[(B'C'), (B''C'')]$



### Esercizio 2- Passaggi 2 e 3

Estendendo i segmenti che hanno per estremi i punti assegnati si definiscono tutti gli elementi descrittivi delle rette che li contengono ed in particolare le tracce  $T_1^{\infty}r$ ;  $T_2r$ ,  $T_1s$ ;  $T_2s$  delle rette  $r$  ed  $s$  contenenti i segmenti.

Per  $\overline{AB \in r}$  si ha:

$[(A'B' \in r'); (A''B'' \in r'')]$

$[(T_1^{\infty}r \in r'); (T_2r \in r'')]$

Per  $\overline{BC \in s}$  si ha:

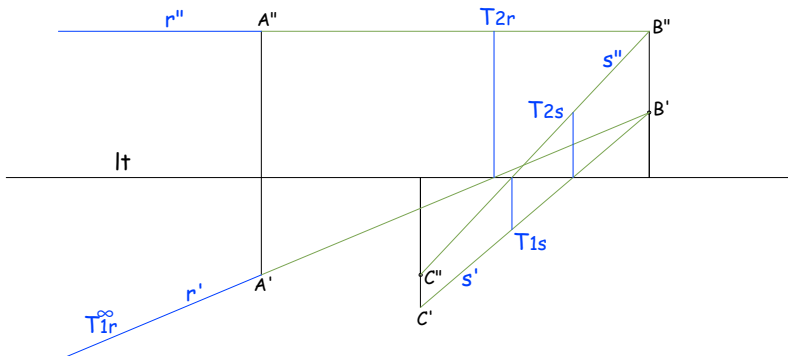
$[(B'C' \in s'); (B''C'' \in s'')]$

$[(T_1s \in s'); (T_2s \in s'')]$

Dati i punti  $A(A'=60,0;A''=90,0)$ ,  $B(B'=-40,0;B''=90,0)$ ,  $C(C'=80,0;C''=-60,0)$  determinare il piano  $\alpha$  passante per essi

Passaggio 1 - Si definiscono le proiezioni dei due segmenti  $[(A'B'), (A''B'')]$  e  $[(B'C'), (B''C'')]$

Passaggi 2 e 3 - Si definiscono le rette  $r$  ed  $s$  contenenti i segmenti e le relative tracce ( $T_1r, T_2r$ ), ( $T_1s, T_2s$ )



## Esercizio 2 - Passaggio 4

Con il passaggio precedente si individuano quattro tracce che, geometricamente, e generalmente, sono quattro punti reali.

In questo caso, però, la traccia  $T_{1r}^{\infty}$  è un punto improprio; ciò vuol dire che la retta  $r$  è parallela a  $\pi_1$  (quindi è una retta orizzontale) e pertanto la traccia  $t_{1\alpha}$  avrà come punto di applicazione la  $T_{1s}$  mentre la  $T_{1r}^{\infty}$  ci suggerisce che la direzione della  $t_{1\alpha}$  si disporrà in modo parallelo ad  $r'$  perché ( $T_{1r}^{\infty} \in r'$ ).

Allo stesso modo collegando ( $T_{2r} + T_{2s}$ ) si determina  $t_{2\alpha}$ .

Le due rette (tracce del piano) devono intersecare la  $l_t$  nel medesimo punto (punto unito).

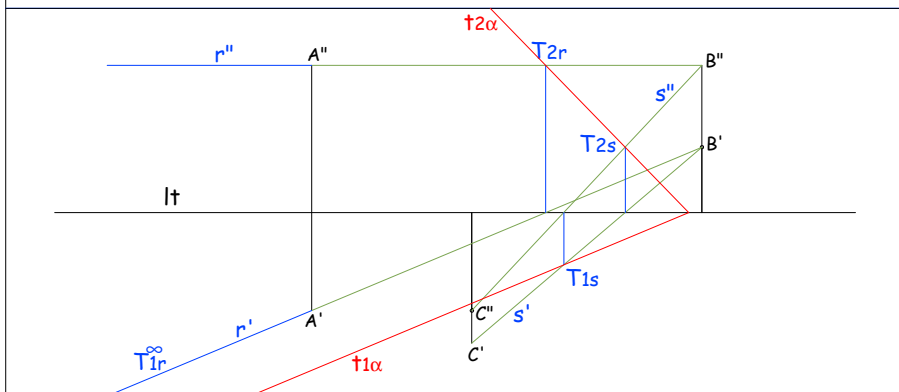
Il piano che si determina con i punti assegnati è un piano generico nel primo diedro che, sinteticamente, descriviamo nel modo seguente:  $\alpha (\angle \pi_1^+ \angle \pi_2^+)$

Dati i punti  $A(A'=-60,0;A''=90,0)$ ,  $B(B'=-40,0;B''=90,0)$ ,  $C(C'=-80,0;C''=-60,0)$  determinare il piano  $\alpha$  passante per essi

Passaggio 1 - Si definiscono le proiezioni dei due segmenti  $[(A'B'), (A''B'')] e [(B'C'), (B''C'')]$

Passaggi 2 e 3 - Si definiscono le rette  $r$  ed  $s$  contenenti i segmenti e le relative tracce ( $T_{1r}, T_{2r}$ ), ( $T_{1s}, T_{2s}$ )

Passaggio 4 - Si definiscono le tracce del piano  $t_{1\alpha}$   $t_{2\alpha}$  passanti per le tracce delle due rette  $r$  ed  $s$



## Verifica

La verifica grafica, effettuata mediante le condizioni di appartenenza, risulta congruente sia con il problema geometrico (piano per tre punti) sia con il fine descrittivo (ricerca del piano) che con l'aspetto rappresentativo (definizione delle tracce).

Le due rette ( $r$  ed  $s$ ), infatti, appartengono al piano perchè le rispettive tracce (tre punti reali ed un punto improprio ( $T_{1r}^{\infty}$ )) stanno sulle



tracce del piano (rette reali) e i punti assegnati appartengono alle rette in quanto le proiezioni degli stessi stanno sulle rispettive proiezioni delle rette.

Quindi possiamo sintetizzare che  $(A,B,C) \in (r,s) \in \alpha$  e, quindi, poichè  $(A,B,C) \in \alpha$ , il piano passa per i tre punti  $(A, B, C)$  assegnati.

Essendo la retta  $r$  una retta orizzontale, la  $(T^\infty 1r)$  è un punto improprio; pertanto la  $t_1\alpha$  si identifica mediante una retta parallela ad  $r'$  applicata nel punto  $T_1s$ .

### Risultato

Dallo studio delle tracce del piano possiamo risalire, poi, alla tipologia descrittiva del piano che risulta essere un "piano generico nel primo diedro" con le seguenti caratteristiche geometriche:

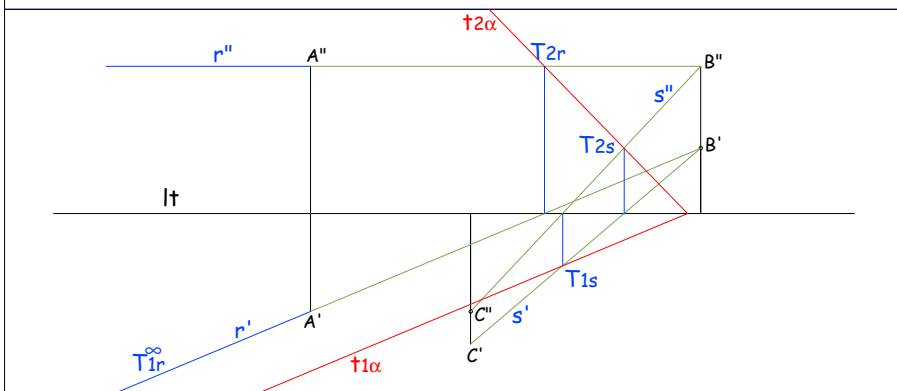
$$(\angle \pi_1^+ \angle \pi_2^+)$$

Dati i punti  $A(A'=60,0;A''=90,0)$ ,  $B(B'=-40,0;B''=90,0)$ ,  $C(C'=80,0;C''=-60,0)$  determinare il piano  $\alpha$  passante per essi

Passaggio 1 -Si definiscono le proiezioni dei due segmenti  $[(A'B'), (A''B'')] e [(B'C'), (B''C'')]$

Passaggi 2 e 3 -Si definiscono le rette  $r$  ed  $s$  contenenti i segmenti e le relative tracce  $(T_1r, T_2r), (T_1s, T_2s)$

Passaggio 4 -Si definiscono le tracce del piano  $t_1\alpha, t_2\alpha$  passanti per le tracce delle due rette  $r$  ed  $s$



Per maggiori approfondimenti si può consultare il sito:

<http://www.webalice.it/eliofragassi>