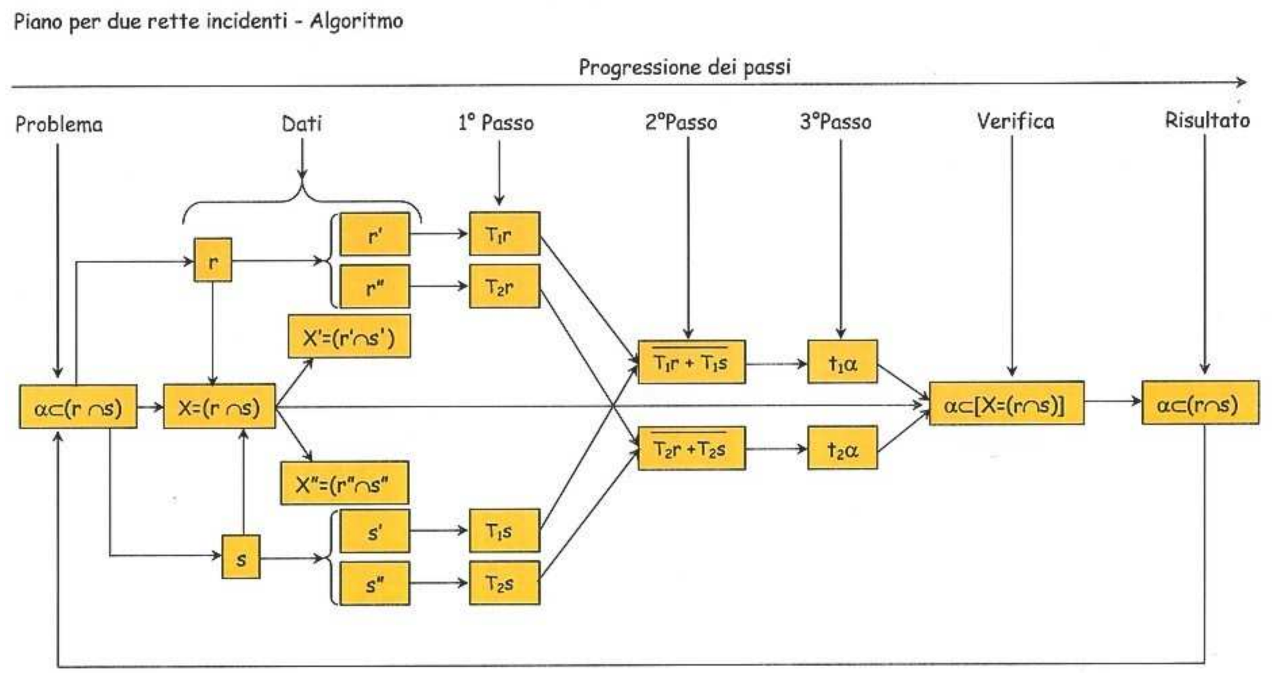
PIANO PER DUE RETTE INCIDENTI

Poiché un piano resta individuato da due rette distinte che si intersecano in un punto X appartenente al piano, è necessario che si verifichi, a conclusione della procedura, la seguente legge di appartenenza e/o relativa contenenza.

$$[(r \cap s)=X \in \alpha] \longrightarrow (r \cap s) \in \alpha \quad \text{reciprocamente} \quad \alpha \subset (r \cap s) \longrightarrow \alpha \subset [X=(r \cap s)]$$

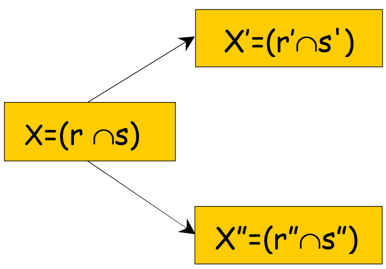
Assegnate, pertanto, due rette distinte, ma incidenti, collocate nello spazio del diedro, il problema si risolve sviluppando i passaggi sintetizzati nello schema sottostante del relativo algoritmo grafico.

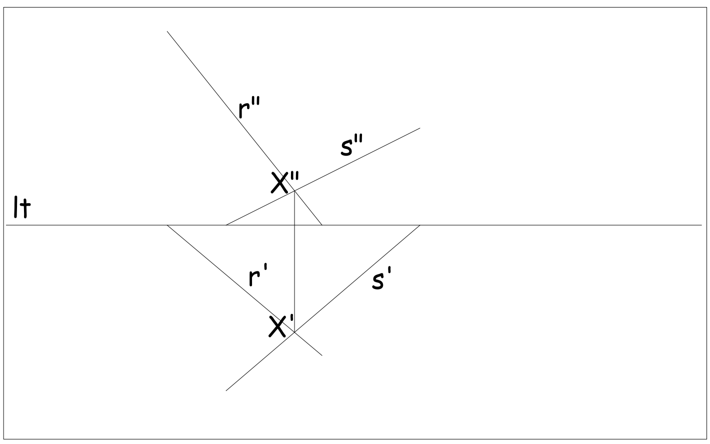
Algoritmo grafico



Sviluppo dell'algoritmo	Operazioni grafiche relative
Dati	

Siano assegnate le rette r(r';r") ed s(s';s") distinte e incidenti nel punto X (X'; X") tali che in forma descrittiva sia:



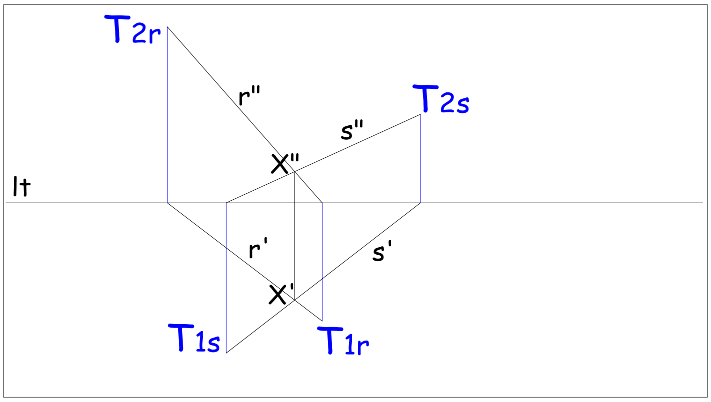


Primo passo

Si ricorda che assegnate le proiezioni di una retta è facile determinarne le tracce partendo dai piedi di queste (incrocio della proiezione con la lt) per arrivare alle due proiezioni che le contengono.

$r \to T_1 r \in r'$, $r \to T_2 r \in r''$

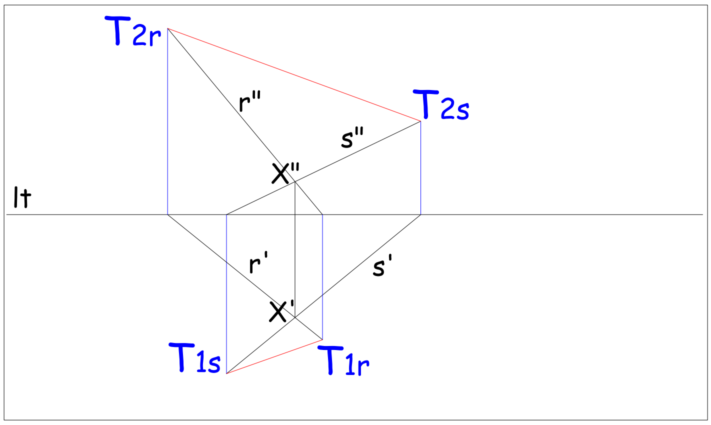
$s \to T_1 s \in s'$, $s \to T_2 s \in s''$



Secondo passo

Si ricorda che le tracce di un piano sono rette; inoltre per definire una retta necessita conoscere due punti. Nel nostro caso collegando (sommando) le due tracce prime si ottiene la traccia prima del piano α su π_1 e collegando (sommando) le due tracce seconde si ottiene la seconda traccia del piano α su π_2 come sintetizzato di seguito:

$\overline{T_1 r + T_1 s}$	Segmento di retta su π_1
$\overline{T_2 r + T_2 s}$	Segmento di retta su π_2



Passo terzo

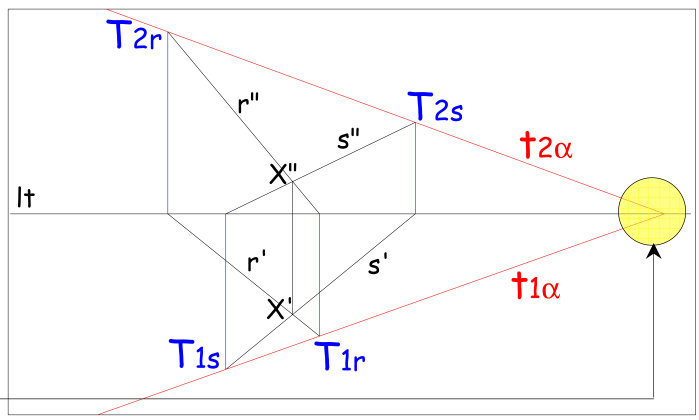
Le tracce del piano ($t_1\alpha$) e ($t_2\alpha$) sono rette reali ottenute come:

$$t_{1\alpha} = \sum_{-\infty}^{\to+\infty} \left\{ \overline{\overline{T_1}} \right\} \qquad t_{2\alpha} = \sum_{-\infty}^{\to+\infty} \left\{ \overline{\overline{T_2}} \right\}$$

Estendendo i segmenti di cui al passo precedente si determinano le due tracce ($t_1\alpha$) e ($t_2\alpha$) del piano passante per le due rette assegnate

$\overline{T_1 r + T_1 s} \to t_1\alpha$

$\overline{T_2 r + T_2 s} \to t_2\alpha$



La verifica che le rette definiscano un

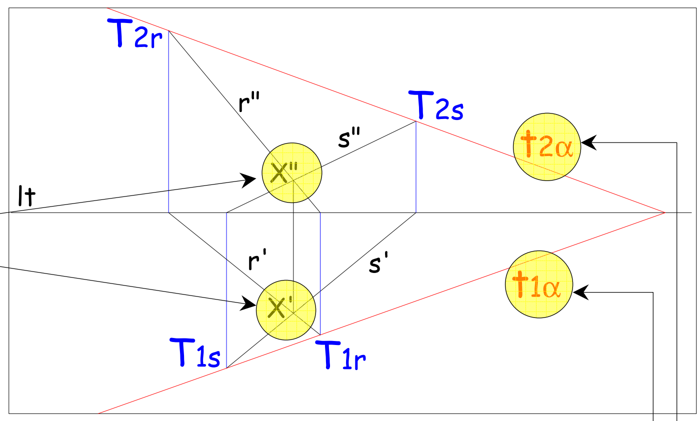
piano si ha se le tracce intersecano la lt nel medesimo punto (punto unito alla lt).

In alternativa le tracce devono essere parallele alla lt, significando che l'intersezione avviene in un punto improprio.

Verifica

Definite le due tracce rappresentative del piano e controllato che si intersechino sulla lt nel medesimo punto, è necessario effettuare la verifica mediante la legge della contenenza tra piano e punto espressa come di seguito:

$\alpha \subset [X=(r \cap s)]$



Risultato

Eseguita la verifica con esito positivo si possono assumere le tracce del piano come gli elementi geometrici rappresentativi del piano passante per le due rette assegnate r ed s incidenti in X in quanto accade che:

$\alpha \subset (r \cap s)$

ESERCITAZIONI GRAFICHE

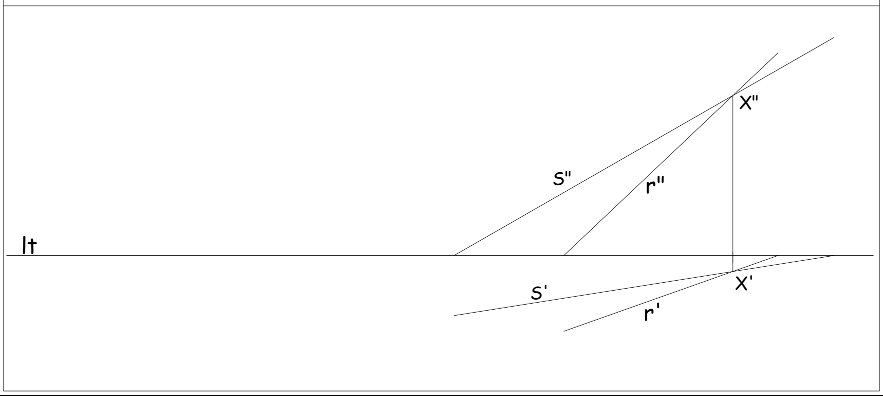
Seguono due applicazioni grafiche con diverse tipologie di rette collocate in differenti diedri ed assegnate mediante le proiezioni

ESERCIZIO N° 1 – Piano per due rette generiche incidenti collocate nel primo diedro

Esercizio 1 - Dati

Siano assegnate le proiezioni di due rette generiche r(r’; r”) ed s(s’; s”) collocate nel primo diedro ed incidenti nel punto X(X’; X”)

Siano assegnate le proiezioni delle rette generiche r(r', r") ed s(s',s") incidenti in X(X'= 1; X"=10)



Esercizio 1 – Passaggio 1

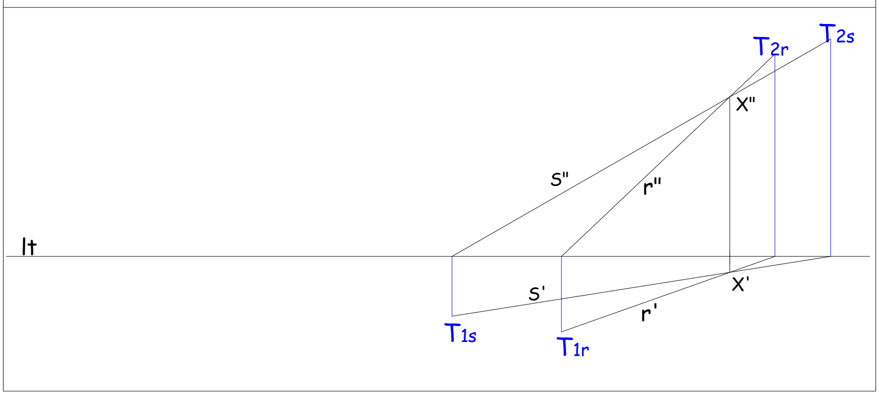
Individuati i piedi delle tracce (intersezioni delle proiezioni con la lt) si determinano le tracce delle rette come punti reali uniti ai piani di proiezione e appartenenti alle rispettive proiezioni:

($T_1r \in r'$), ($T_2r \in r''$)

($T_1s \in s'$), ($T_2s \in s''$)

Siano assegnate le proiezioni delle rette generiche r(r', r") ed s(s',s") incidenti in X(X'= 1; X"=10)

Passo 1:completare la rappresentazione delle rette ricercandone le rispettive tracce (T1r,T2r),(T1s,T2s)



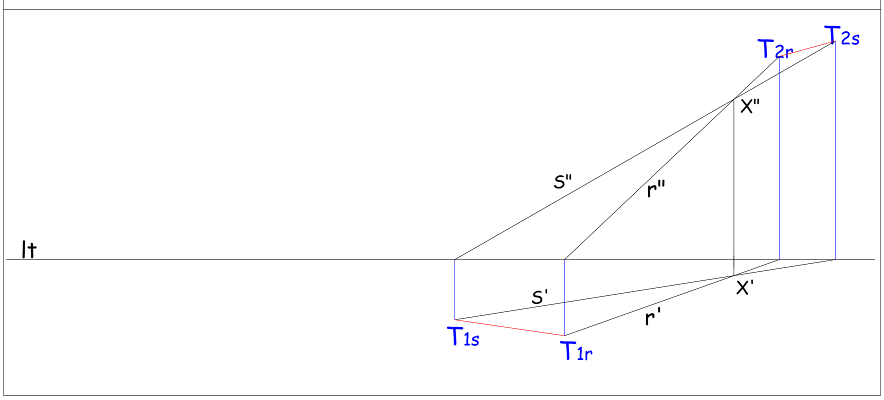
Esercizio 1- Passaggio 2

Definite le tracce delle due rette, collegendo ($T_1r + T_1s$) si ottiene il segmento di retta relativo alla traccia del piano α su π_1, collegando ($T_2r + T_2s$) si ottiene il segmento di retta relativo alla traccia del piano α su π_2. In questo modo si determinano le direzioni delle due tracce del piano che per essere tali devono intersecare la lt nel medesimo punto (punto reale unito alla lt).

Siano assegnate le proiezioni delle rette generiche r(r', r") ed s(s',s") incidenti in X(X'= 1; X"=10)

Passo 1:completare la rappresentazione delle rette ricercandone le rispettive tracce (T1r,T2r),(T1s,T2s)

Passo 2: Poichè le tracce del piano sono rette reali si collegano le due prime tracce e le due seconde tracce per definire le direzioni di t1α e t2α del piano cercato



Esercizio 1 – Passaggio 3

Estendendo i due segmenti di retta di cui al passaggio 2, si determinano le rette ($t_1\alpha$) e ($t_2\alpha$) come tracce del piano α assegnato mediante due rette incidenti ($r \cap s$).

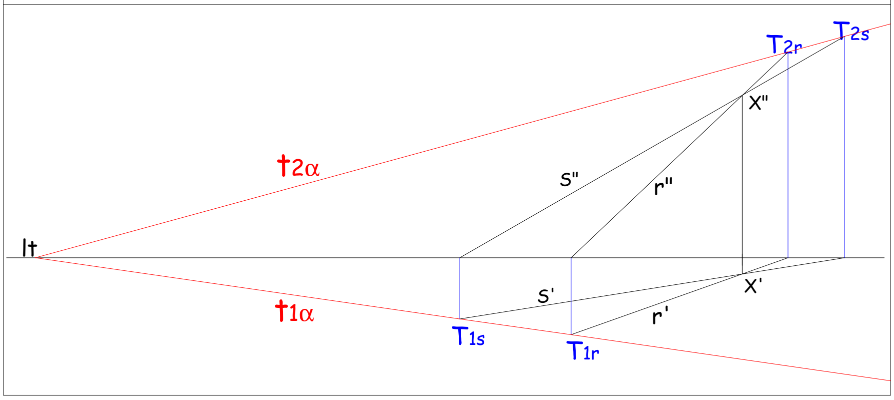
Che le due rette sono tracce del piano è confermato dalla intersezione di queste con la lt nel medesimo punto.

Siano assegnate le proiezioni delle rette generiche r(r', r") ed s(s',s") incidenti in X(X'= 1; X"=10)

Passo 1:completare la rappresentazione delle rette ricercandone le rispettive tracce (T1r,T2r),(T1s,T2s)

Passo 2: Poichè le tracce del piano sono rette reali si collegano le due prime tracce e le due seconde tracce per definire le direzioni di t1α e t2α del piano cercato

Passo 3: estendendo i segmenti (T1r,T1s) e (T2r,T2s) si ottengono le tracce t1α e t2α del piano cercato.



Verifica

La verifica grafica, eseguita mediante le condizioni di appartenenza, risulta essere congruente sia con il problema geometrico (piano per due rette incidenti), sia con l'aspetto descrittivo (ricerca del tipo di piano), sia con l'aspetto rappresentativo (determinazione delle tracce del piano).
Le due rette assegnate r ed s, infatti, appartengono al piano perché le rispettive tracce (due tracce prime e due tracce seconde) appartengono alle omonime tracce del piano (traccia prima di α e traccia seconda di α).
Inoltre le due rette (r, s) sono incidenti perché le proiezioni del punto d'intersezione X (X'; X") stanno nel medesimo luogo sulle proiezioni delle due rette r ed s perché il punto appartiene contemporaneamente ad entrambe le rette.
Quindi resta completamente verificata la condizione:

$$\boxed{\alpha \subset [X=(r \cap s)]} \longrightarrow \boxed{\alpha \subset (r \cap s)}$$

Risultato

Dallo studio delle tracce del piano possiamo risalire, poi, alla tipologia descrittiva del piano che si caratterizza come "**piano generico nel primo diedro**" avente le seguenti caratteristiche geometrico-descrittive.

$$\boxed{\alpha \subset (r \cap s) = \alpha(\angle \pi_1^{+} \angle \pi_2^{+})}$$

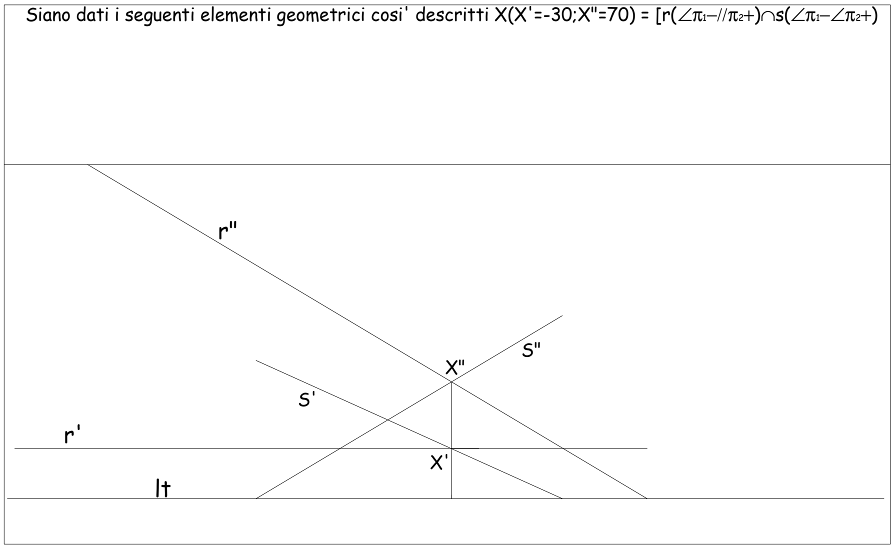
ESERCIZIO N° 2 – Piano per retta generica e retta frontale nel secondo diedro

Esercizio 2 - Dati

Siano assegnati i seguenti elementi geometrici tutti collocati nello spazio del secondo diedro.

Retta frontale r (r';r"),
Retta generica s (s';s").

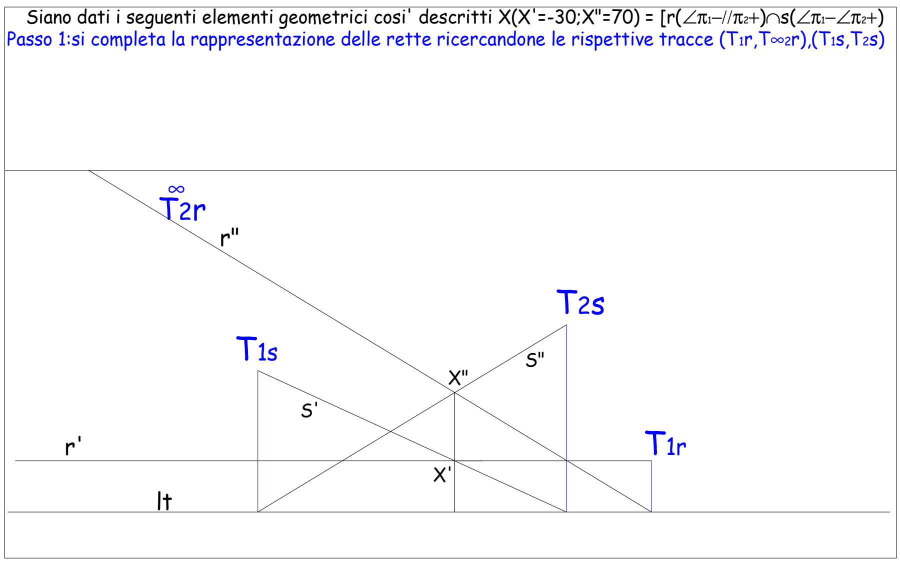
Siano le due rette incidenti nel punto
X (-X'; X")



Esercizio 2 – Passaggio 1

Individuati i piedi delle tracce sulla lt si determinano le tracce delle rette come punti reali uniti ai piani di proiezione e appartenenti alle rispettive proiezioni: ($T_1r \in r'$), ($T^{\infty}_2 r \in r''$) ($T_1 s \in s'$), ($T_2 s \in s''$)

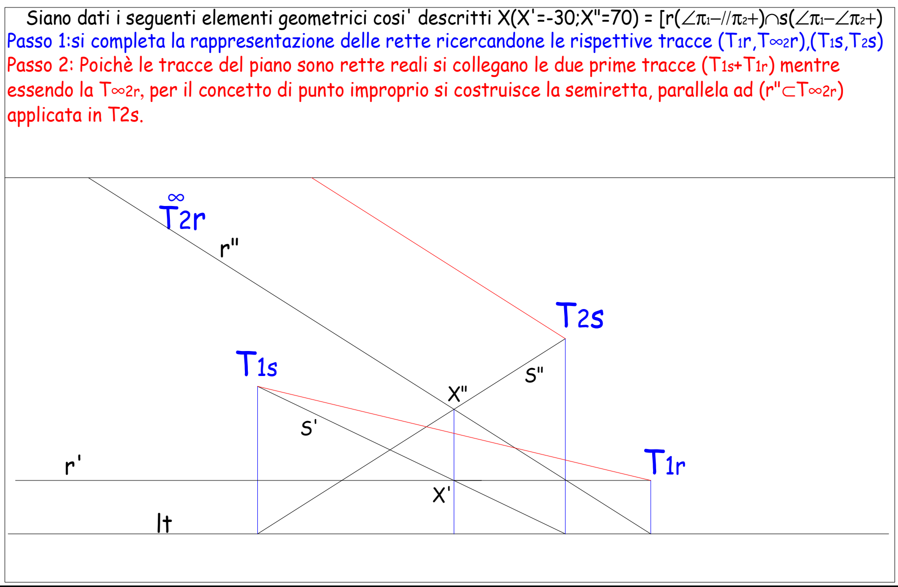
Da notare che essendo la retta r parallela a π^+_2 la traccia seconda assume l'aspetto di un punto improprio indicato come $T^{\infty}_2 r$.



Esercizio 2 - Passaggio 2

Definite le tracce delle due rette, collegando ($T_1r + T_1s$) si ottiene il segmento di retta relativo alla traccia del piano α su π_1; conducendo per T_2s una semiretta parallela a r" si ottiene la direzione della traccia del piano α su π_2.

Mi preme ricordare- a tal proposito- che al concetto di punto improprio deve



essere sempre associato il concetto di parallelismo tra rette.

In questo modo si determinano le direzioni delle due tracce del piano che per essere tali devono intersecare la lt nel medesimo punto (punto reale unito alla lt).

Essendo la retta r una retta frontale nel secondo diedro la ($T^{\infty}2r$) è un punto improprio, pertanto la $t_2\alpha$ si identifica, graficamente, mediante una retta parallela ad r" applicata nel punto reale T_2s.

Esercizio 2 – Passaggio 3

Estendendo il segmento di retta ($T_1r + T_1s$) e la semiretta ($T^{\infty}{}_2r + T_2s$), si determinano le rette ($t_1\alpha$) e ($t_2\alpha$) come tracce del piano α assegnato mediante le due rette incidenti ($r \cap s$).

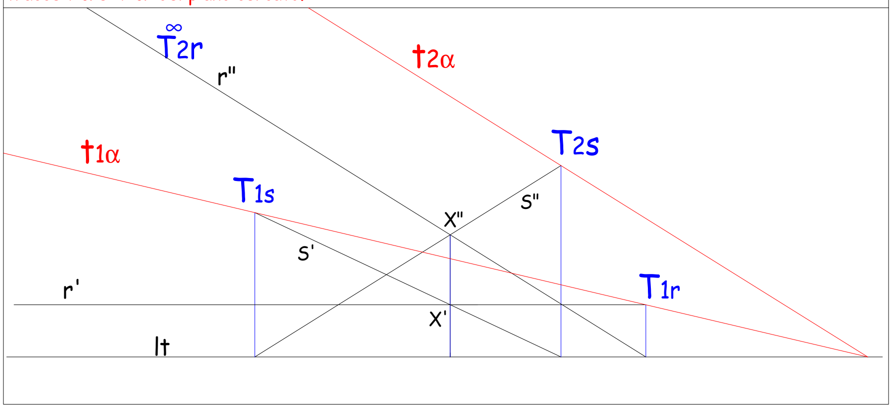
Che le due rette sono tracce del piano è confermato dalla intersezione di queste con la lt nel medesimo punto.

Siano dati i seguenti elementi geometrici cosi' descritti $X(X'=-30;X''=70) = [r(\angle\pi_1 - //\pi_2+) \cap s(\angle\pi_1 - \angle\pi_2+)$

Passo 1:si completa la rappresentazione delle rette ricercandone le rispettive tracce ($T_1r, T_{\infty 2}r$),(T_1s, T_2s)

Passo 2: Poichè le tracce del piano sono rette reali si collegano le due prime tracce ($T_1s + T_1r$) mentre essendo la $T_{\infty 2}r$, per il concetto di punto improprio si costruisce la semiretta, parallela ad ($r'' \subset T_{\infty 2}r$) applicata in T2s.

Passo 3: estendendo i segmenti (T_1r, T_1s) e il segmento parallelo ad r" applicato su T_2s si ottengono le tracce $t_1\alpha$ e $t_2\alpha$ del piano cercato.



Verifica

La verifica grafica, eseguita mediante le condizioni di appartenenza, risulta essere congruente sia con il problema geometrico (piano per due rette incidenti), sia con l'aspetto descrittivo (ricerca del tipo di piano), sia con l'aspetto rappresentativo (determinazione delle tracce del piano).
Le due rette assegnate r ed s, infatti appartengono al piano perché le rispettive tracce (due tracce prime e due tracce seconde) appartengono alle rispettive omonime tracce del piano (traccia prima di α e traccia seconda di α).
Inoltre le due rette (r, s) sono incidenti perché le proiezioni del punto d'intersezione X (X'; X") stanno nel medesimo luogo sulle proiezioni delle due rette r ed s perché il punto appartiene contemporaneamente ad entrambe le rette.
Quindi resta completamente verificata le condizione :

$$\boxed{\alpha \subset [X = (r \cap s)]} \longrightarrow \boxed{\alpha \subset (r \cap s)}$$

Risultato

Dallo studio delle tracce del piano possiamo risalire, poi, alla tipologia descrittiva del piano che si caratterizza come "**piano generico nel secondo diedro**" avente le seguenti caratteristiche geometrico-descrittive.

$$\alpha \subset (r \cap s) = \alpha(\angle \pi_1^{-} \angle \pi_2^{+})$$