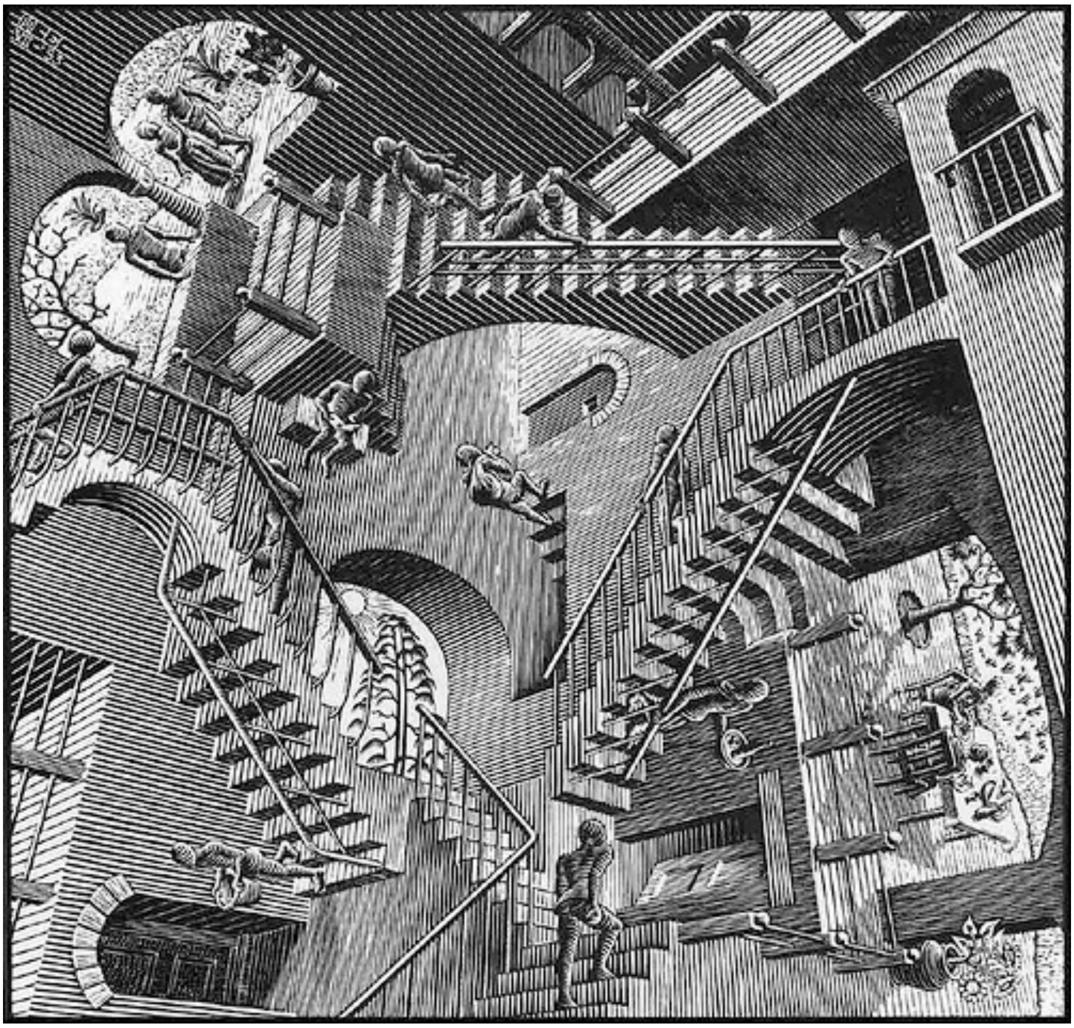
CREPA NEL PALAZZO DI CRISTALLO

A cura di Sebastian Salassi
IIS Capellini - Sauro – Classe 5 /STC
Anno scolastico 2010 – 2011



(*Relatività*, Maurits Cornelis Escher, 1953, litografia)

Dubitare di tutto o credere a tutto sono due soluzioni ugualmente comode che ci dispensano, l'una come l'altra, dal riflettere.

Jules Henri Poincaré

INDICE

RELATIVISMO E PERDITA DELLE CERTEZZE

Tutto è divenuto; non ci sono fatti eterni: così come non ci sono verità assolute.

Friedrich Nietzsche

Introduzione

«La fisica di Newton con il suo rigido determinismo che vedeva l'Universo come una grossa macchina animata da un moto perenne regolato da leggi eterne ed immutabili, aveva trasfuso negli uomini un senso di certezza del domani favorevole alla conservazione di certi valori umani tradizionali»[1]. Ma qualcosa stava per cambiare.

Il periodo di fine XIX e inizio XX secolo è caratterizzato da un'ampia discussione in ambito scientifico - filosofico sui fondamenti della verità e delle salde certezze credute sino ad allora. La fisica di Newton e la fede sulle certezze indiscusse di Euclide sul fondamento della fisica e della matematica influirono molteplici sistemi di pensiero e in genere aprirono la strada ad una fiducia nelle scienze mai pensata. Soprattuto il filosofo tedesco Immanuel Kant subì un notevole influsso dalla geometria di Euclide, considerata l'apoteosi della verità non derivata dall'esperienza, tant'è che la metterà su un piedistallo privilegiato atto a spiegare ed organizzare il mondo spaziale attorno a noi. Ugualmente accade alle leggi di Newton, considerate verità ormai definitivamente raggiunte, eterne ed immutabili, necessarie per il raggiungimento della vera conoscenza, a cui dovevano essere ricondotte le nuove scoperte.

Tuttavia lo stesso progresso scientifico e questa fede indiscussa su verità considerate incontestabili, condussero a mettere in discussione gli stessi presupposti che l'hanno originato. La millenaria fede nella dimostrazione utilizzata da Euclide nel V postulato delle rette parallele nel volume de *Gli Elementi,* non convinse i maggiori matematici dell'epoca e nuove proposte furono prese in considerazione. Nascono le geometrie non euclidee, fondate sulla negazione del V postulato di Euclide, dimostrando come sia estremamente debole l'edificio su cui da millenni si fondavano tutte le certezze. Questa scienza «ritenuta privilegiata in quanto capace di imporre le proprie leggi al mondo oggettivo, almeno kantianamente, come scienza sintetica a priori, veniva minata alle fondamenta: la detronizzazione euclidea veniva attuata da Riemann tramite il suo concetto di curvatura alle varietà pluriestese, concetto che seguiva la teoria sulle superfici di Gauss e che *"decentrava" copernicamente la geometria euclidea come una tra le tante geometrie metriche possibili* [il corsivo è mio]. Dopo due millenni di "glorioso legame all'assoluto" la geometria euclidea subiva la stessa sorte che aveva visto la Terra esiliata in periferie e l'uomo schiacciato verso l'ameba: la perdita della certezza, il processo di relativizzazione del fondamento»[2].

La geometria euclidea perdeva così la capacità di giungere ad una rappresentazione indiscutibile dello spazio, essa non poteva più costituire una scienza dimostrativa fondata sull'evidenza

---

1 Cit da R. V. Macrì, Relativismo e pensiero debole: perdita del fondamento, p. 15 di Paolo Silvestroni, Fondamenti di chimica, p. 31

2 Rocco Macrì, Relativismo e pensiero debole: perdita del fondamento, p. 16

a priori e sull'intuizione spaziale, ed era costretta a ricercare nella correttezza logica delle deduzioni il solo criterio di validità. Morsi Kline, nel suo saggio *Matematica: la perdita della certezza*, racconta con estrema chiarezza lo stato in cui verte la matematica negli ultimi cento anni: «Gli sviluppi succedutisi nei fondamenti della matematica a partire dal 1900 sono sorprendenti; attualmente la matematica è in uno stato anomalo e giace in una condizione deplorevole. La luce della verità non illumina più la strada che deve essere seguita. Invece di un unico corpo matematico universalmente accettato [...] troviamo ora diversi punti di vista in conflitto fra loro»[1].

Negli stessi anni, tuttavia, un duro colpo dovettero subire anche le verità newtoniane. Una vera e propria rivoluzione investì il modello meccanico di Newton, fondato sull'idea dell'assolutezza del tempo e dello spazio e sul presupposto deterministico dell'esistenza di un ordine naturale determinabile, eterno ed immutabile, basato su rapporti di causa ed effetto. Nonostante tutti i tentativi di salvare il modello meccanico, fecero la loro dirompente entrata nel mondo della fisica l'elettromagnetismo e la figura di James Clerk Maxwell (1831 - 1879), con le conseguenti assillanti domande sulla luce e la natura dell'etere. La crisi generata da queste nuove scoperte e l'enorme difficoltà portata dall'etere si fece irreversibile con i risultati dell'esperimento di Michelson - Morley. Ma nel 1905 entra sulla scena Albert Einstein, con una soluzione quanto mai elegante, logica e coerente. «L'abbattimento totale avverrà con l'avvento della seconda rivoluzione scientifica, a partire dalla teoria della relatività di Einstein, che sigillerà in modo irreversibile la perdita dell'intuizione e del senso comune [...]: non solo la dottrina generale dell'intuizione intesa come fonte infallibile di conoscenza è un mito, ma la nostra intuizione del tempo, [...] come lo è [...] la nostra intuizione dello spazio»[2]. Egli dimostra, infatti, come lo spazio e il tempo non siano entità immutabile e assolute, ma dipendono entrambe dall'osservatore e dalle condizioni dello stato di moto dell'osservatore stesso e dell'oggetto osservato. Contro ogni tradizione meccanicistica, Einstein elimina ogni parvenza delle stelle fisse e del cosiddetto etere e introduce il concetto di spazio-tempo. Nasce la relatività speciale, in cui la meccanica newtoniana costituisce solo un caso limite, riferibile a velocità molto inferiori a quelle della luce.

Ben presto la fisica si ritrovò ad incassare un altro colpo ancora più sorprendente. *Lo spazio che ci circonda non è euclideo*, questa è una delle più straordinarie conclusioni della relatività generale di Albert Einstein, e uno dei più formidabili legami tra la nuova geometria e la nuova fisica: le geometrie non euclidee sono capaci di descrivere lo spazio fisico quanto lo è la geometria euclidea, entrambe sono valide e coerenti allo stesso livello. Teoria della relatività generale, teoria che nasce dal bisogno di eguagliare ogni sistema di riferimento e di sanare le ultime contraddizioni che ancora la vecchia teoria ha originato dallo scontro con la nuova.

Questi sviluppi teorici inducono una profonda revisione delle procedure del fondamento del sapere scientifico, condotta sia da scienziati che da filosofi. Più in generale è lo stesso ideale di scienza positiva che viene messo in questione, o meglio essa mette in questione sé stessa. Ovviamente si precisa che questo fenomeno non riguarda solo gli autori e le scoperte citate, ma

1 Cit da R. V. Macrì, Relativismo e pensiero debole: perdita del fondamento, p. 17; di Morris Kline, Matematica: la perdita della certezza, pp. 302 - 303

2 Ibidem, p. 16

bensì tutto un periodo di trattazioni filosofiche e scientifiche. Contributo a questa crisi dei valori e delle certezze viene dato, infatti, da tutte le nuove "scoperte" del novecento, nonché dal profondo stato di crisi che la prima e la seconda guerra mondiale hanno provocato nel pensiero.

Si può citare la teoria psicoanalitica di Freud, che ha portato non pochi stravolgimenti sulla concezione positivistica della psiche umana, con l'introduzione del concetto di inconscio, sede dei contenuti rimossi dalla coscienza, che determinano secondo Freud i nostri comportamenti e, quindi, il nostro modo di essere.

In ambito scientifico si ricorda, poi, la teoria quantistica, nata quasi in concomitanza con la relatività di Einstein. I suoi maggiori esponenti: Planck, per l'introduzione dei quanti di energia, e Heisenberg, famoso per il suo principio di indeterminazione, colonna portante della teoria quantistica, in cui si nega la possibilità di una determinazione della posizione dell'elettrone e si introduce il concetto di probabilità di trovare l'elettrone. La probabilità entra, così, definitivamente nella spiegazione dei fenomeni, contribuendo alla definitiva scomparsa di un qualsiasi approccio deterministico e meccanicistico. Ma oltre a far vacillare i capisaldi del determinismo, il principio di indeterminazione, preso nell'accezione più generale, rivela l'impossibilità di predire con certezza gli stati futuri di un sistema fisico, conoscendo le condizioni di partenza, e mette in luce come ogni osservazione interferisca inevitabilmente con il sistema osservato.

Tutte queste scoperte mettono in evidenza l'entrata sempre più dirompente di un certo relativismo anche nelle scienze, ossia l'introduzione di una certa pluralità di punti di vista e di osservazioni. Possiamo quasi dire che il crescente relativismo riscontrato nelle scienze sia in relazione con la demolizione delle vecchie certezze.

Il filosofo tedesco Friedrich Nietzsche (1844 - 1900) interpreta molto bene il periodo in questione. Egli giunge ad una vera e propria critica degli ideali positivistici, inserendo il concetto di *prospettivismo.* Nietzsche contesta tutto il sistema di pensiero positivistico dicendo che esso non è l'unico modo corretto e valido per descrivere il mondo. In particolare, ciò che chiamiamo verità è per il filosofo solo un gioco di dadi concettuale che si determina nelle *infinite interpretazioni del mondo prodotte dall'intelletto umano*. In definitiva questo è il concetto di prospettivismo. La verità non è altro che un complesso e provvisorio modo di vedere e configurare determinate opinioni, concezioni e fenomeni, date dal prevalere, in campo individuale e collettivo, di un certo numero di criteri ed interessi, che ne pregiudicano l'interpretazione. E dunque questo è il compito che Nietzsche attribuisce all'oltre uomo. In questo contesto critico egli reputa, non solo necessario, ma imminente, una crisi totale dei valori, la cosiddetta morte di Dio. Esso ovviamente non è da intendersi letteralmente come morte di Dio, ma coma la fine dell'insieme di tutti i valori, sociali, morali e religiosi che hanno determinato la società occidentale nel corso dei millenni. Ebbene per poter ricostruire i valori è necessario l'oltre uomo, capace di superare la morte di Dio, e dotato della volontà di potenza, concetto con il quale Nietzsche dà all'oltre uomo la capacità di rifondare i nuovi valori sulla base del prospettivismo.

Ed è con il prospettivismo che Nietzsche si scaglia contro il positivismo: «non esistono fatti, bensì solo interpretazioni». Non esistono né verità, né falsità, ma solo prospettive differenti sulla realtà. La conoscenza, «al di là del vero e del falso», è dunque formata da verità che si equivalgono, giacché nessun criterio oggettivo può essere utilizzato per dimostrarne una. Il mondo, nella sua qualità polimorfa, incerta e mutevole, non è altro che il risultato della pluralità dei punti di vista e delle prospettive degli uomini. Conoscere per Nietzsche significa valutare, ossia organizzare la realtà mediante la propria prospettiva, mediante la propria tavola dei valori. Ed essendo, infine, i valori a distinguere ciò che è vero da ciò che è falso, essi sono il mezzo attraverso il quale gli uomini esprimono la propria singolarità e la propria morale.

«Abbiamo visto come le svolte fondamentali del pensiero scientifico, "le umiliazioni inferte dalla scienza", seguano un filo di Arianna che approda al relativismo, ossia ad un nitido indebolimento dell'assoluto, al decentramento dei fondamenti, alla perdita delle certezze»[1].

Ma che cosa significa precisamente il termine relativismo? Esso, indica, in generale ogni concezione filosofica tesa a non ammettere verità assolute. Generalmente, il relativismo, in quanto corrente filosofica è un fenomeno tutto moderno, legato, principalmente, ad una reazione alla crisi culturale scientifica del XIX secolo e a movimenti filosofici affermatesi in questo periodo, quali per esempio il positivismo. Esso rappresenta una reazione alla certezza dell'esistenza di una gerarchia di valori e di verità immutabili, validi in ogni dove e in ogni circostanza, come per esempio è la filosofia meccanicista della meccanica newtoniana, in cui ogni fenomeno doveva essere spiegato da relazioni semplici in cui agissero solo forze in relazione alla distanza e ad una proprietà intrinseca dei corpi, valide in ogni tempo e circostanza. Per contro a questa interpretazione deterministica e meccanicistica, il relativismo moderno afferma la parzialità, l'equivalenza e la fallibilità di tutti i principi della conoscenza e di tutti i valori morali e sociali. Sostiene il filosofo Spengler, uno dei massimi esponenti del relativismo: «ogni cultura ha il suo proprio criterio la cui validità comincia e finisce con essa. Non vi è alcuna morale universale».

Anche se si è detto che il relativismo è un fenomeno moderno, tuttavia, esso ha in realtà origine remote. Possiamo dire che già Democrito sviluppò una prima forma di relativismo sostenendo la fallacia e la relatività delle sensazioni come strumento di conoscenza. Ma è la cultura sofista, con autori come Protagora e Gorgia, a farne il proprio cavallo di battaglia, pervenendo ad una più radicale forma di relativismo attraverso la critica di nozione della verità. In sostanza per loro non esiste nessuna verità assoluta universalmente valida, l'unico metro di giudizio e di valutazione diviene l'individualismo: per ciascuno è vero solamente la sua percezione soggettiva. Il valore di verità di un'asserzione viene perciò valutato, di volta in volta, attraverso la persuasività del discorso che la sostiene. Da questi risultati si giunse però ad una forma di relativismo estremo, sostenuto dalle asserzioni della seconda filosofia sofista, approdando ad certo scetticismo, sostenendo l'impossibilità di attribuire un valore veritiero a qualsivoglia asserzione.

A titolo di esempio, non si può non notare, l'estrema similitudine di quanto detto con un autore italiano, Luigi Pirandello (1867 - 1936). La similitudine riguarda il concetto di relativismo in relazione all'individualità. Pirandello, con il suo romanzo *Uno, nessuno e centomila,* sarà uno dei maggiori interpreti italiani del tema del relativismo, della crisi dell'indennità e della crisi dell'io, approdando a concezioni quanto mai relativistiche. Senza addentrarmi nella speculazione di Pirandello, citerò le sue parole, tratte da *Uno, nessuno e centomila*, al fine di avere una miglior comprensione di questi concetti.

---

1 Rocco Macrì, Relativismo e pensiero debole: perdita del fondamento, p. 32

«Lasciatemi dire un'altra cosa, e poi basta.
[…] *riconosco che per voi stesso, dentro di voi, non siete quale io, di fuori, vi vedo. Non per cattiva volontà... Voi vi conoscete, vi sentite, vi volete in un modo che non è il mio, ma il vostro; e credete ancora una volta che il vostro sia giusto e il mio sbagliato. Sarà, non nego. Ma può il vostro modo essere mio e viceversa?* […]
Io posso credere a tutto ciò che voi mi dite. Ci credo. […]
Domani mi venite con le mani in faccia, gridando:
- Ma come? Che avete inteso? Non mi avevate detto così e così? -
Così e così, perfettamente. Ma il guajo è che voi, caro, non saprete mai, ne io vi potrò mai comunicare, come si traduca in me quello che voi mi dite. Non avete parlato turco, no. Abbiamo usato, io e voi, la stessa lingua, le stesse parole. Ma che colpa abbiamo, io e voi, se le parole, per sé, sono vuote? Vuote, caro mio. E voi le riempite del senso vostro, nel dirmele; e io nell'accoglierle, inevitabilmente, le riempio del senso mio. Abbiamo creduto d'intenderci; non ci siamo intesi affatto. […]
- Ma perché allora, santo Dio, seguitate a fare come se non si sapesse? A parlarmi di voi, se sapete che per essere per me quale siete per voi stesso, e io per voi quale sono per me, ci vorrebbe che io, dentro di me, vi déssi quella stessa realtà che voi vi date, e viceversa; e questo non è possibile? -
Ahimè, caro, per quanto facciate, voi mi darete sempre una realtà a modo vostro, anche credendo in buona fede che sia a modo mio; e sarà, non dico; magari sarà; ma a un «modo mio» che io non so né potrò mai sapere; che sapreste soltanto voi che mi vedete da fuori: dunque un «modo mio» per voi, non un «modo mio» per me.
Ci fosse fuori di noi, per voi e per me, ci fosse una signora realtà mia e una signora realtà vostra, dico per se stesse, e uguali, immutabili. Non c'è. C'è in me e per me una realtà mia: quella che io mi dò; una realtà vostra in voi e per voi: quella che voi vi date; le quali non saranno mai le stesse né per voi né per me.
E allora?
Allora, amico mio, bisogna consolarci con questo: che non è più vera la mia che la vostra, e che durano un momento così la vostra come la mia. Vi gira un po' il capo? Dunque dunque... concludiamo.
Ecco, dunque, volevo venire a questo, che non dovete dirlo più, non lo dovete dire che avete la vostra coscienza e che vi basta.
Quando avete agito così? Jeri, oggi, un minuto fa? E ora? Ah, ora voi stesso siete disposto ad ammettere che forse avreste agito altrimenti. E perché? Oh Dio, voi impallidite. Riconoscete forse anche voi ora, che un minuto fa voi eravate un altro?
Ma sì, ma sì, mio caro, pensateci bene: un minuto fa, prima che vi capitasse questo caso, voi eravate un altro; non solo, ma voi eravate anche cento altri, centomila altri. E non c'è da farne, credete a me, nessuna maraviglia. Vedete piuttosto se vi sembra di poter essere così sicuro che di qui a domani sarete quel che assumete di essere oggi.
Caro mio, la verità è questa: che sono tutte fissazioni. Oggi vi fissate un modo e domani in un altro»[1].

Il protagonista del romanzo, Vitangelo Moscarda, viene avvertito dalla moglie di un piccolo difetto fisico, il naso leggermente storto. Questo motivo futile porta il protagonista a confrontarsi con le altre persone. Scopre così che ognuno lo vede in maniera diversa. Egli è dunque uno, in quanto egli si vede in un solo modo, centomila, poiché le altre persone lo vedono in molteplici modi diversi, e quindi nessuno, proprio per il fatto di non avere un'identità assoluta e certa.

In questo passo Pirandello esprime chiaramente il suo concetto di relatività della realtà e il concetto di relatività dell'io nel tempo. In questa sorta di monologo teatrale, Vitangelo Moscarda, esprime il pensiero dell'autore, facendo intendere a chiare lettere che non esiste una

1 Luigi Pirandello, Uno, nessuno e centomila, Libro secondo, cap. IV - V, pp.46 - 49

realtà oggettiva comune a tutti. Per questa ragione, in un dialogo, sebbene si creda di essersi intesi perfettamente, si viene poi a scoprire che in realtà si ha una visione dell'argomento completamente diversa dagli altri. Questo avviene perché ognuno è convinto di possedere la verità assoluta e oggettiva, mentre in realtà possiede solo una sua verità.

Nella parte finale Pirandello, seguono la concezione della vita del filosofo Henri Bergson, intesa come flusso continuo di stati indeterminate e diversi tra di loro, esprime il concetto di relativismo dell'io rispetto al tempo. Un individuo è tale solo in un determinato momento. Pochi istanti prima era diverso così come sarà diverso pochi istanti dopo.

Da quanto si è potuto vedere da questo percorso, la crisi dei valori e il termine relativismo, investe ogni campo del sapere. È mia intenzione mettere in evidenza alcuni aspetti fondamentali e la portata nel pensiero delle maggiori e nuove rivoluzioni scientifiche di questo periodo: la relatività di Albert Einstein e le geometrie non euclidee.

FINE DELLO SPAZIO TEMPO ASSOLUTO

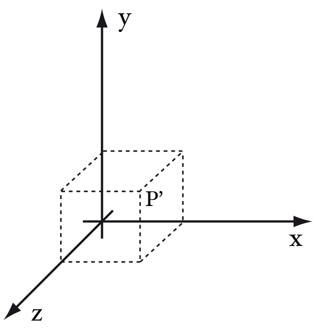
AGGIORNIAMO LA FISICA DI NEWTON

Nell'introduzione ho accennato ad alcuni concetti in merito alla “relatività”; ma che cosa si intende per “relatività” in fisica? Prima di tutto è necessario distinguere tra *principio* di relatività e *teoria* della relatività. Il primo è un assioma della fisica, quasi possiamo dire di tutto il metodo scientifico, ed è un criterio di verifica di una qualsiasi teoria fisica, in quanto stabilisce che essa non è valida se per situazioni simili non prevede le stesse leggi. Diversamente una teoria della relatività si basa su un principio di relatività; ne deve delineare le conseguenze e dimostrarne la sua validità. Tale differenza sembra molto banale, ma non lo sono le implicazioni: se, per esempio, si dovesse scoprire un sistema di riferimento che invalida il *principio* della relatività speciale o un fenomeno che non sottosta a tale principio, cadrebbe tutto il corpus della *teoria* della relatività speciale, e ad essa tutte le teorie su cui si basano. Sarebbe di conseguenza necessario modificare il principio di relatività in modo da renderlo compatibile con quanto di nuovo scoperto[1].

Nel corso della storia della fisica, quanto accennato sopra, si è verificato alla fine del XIX secolo: si scoprì che le equazioni di Maxwell, alla base dell’elettromagnetismo, non soddisfacevano il principio di relatività galileiano.

Relatività Galileiana

Ho parlato spesso di sistema di riferimento. Generalmente il movimento di un corpo viene sempre messo in relazione ad un altro, al fine di determinarne lo stato di moto stesso. Un sistema di riferimento è appunto un insieme di riferimenti necessari per individuare la posizione di un corpo nello spazio, ma ciò non basta: per poterne determinare univocamente la posizione è necessario associare al sistema di riferimento un sistema di coordinate, che inseguito chiameremo semplicemente SC. Un esempio pratico potrebbe chiarire le idee: immaginiamo una torre dalla quale lasciamo cadere un oggetto e ne vogliamo, istante per istante, misurare la posizione rispetto al punto di partenza. Ebbene, questo “punto di partenza” sarò il nostro sistema di riferimento, al quale è necessario associare un sistema di coordinate. Esso è costituito da un’asta graduata posta su tutta l’altezza della torre, dove è possibile leggere la posizione del corpo durante il suo moto di caduta. Generalmente per descrivere i fenomeni fisici, e in particolare le leggi della meccanica, si prendono in considerazioni sistemi di riferimento arbitrari su cui si associa un sistema di coordinate Cartesiano x, y e z.



Ma ogni sistema di riferimento è equivalente? Consideriamo dunque un SC K’ in moto di rotazione rispetto a K e di farvi alcuni esperimenti sul moto dei corpi. Otterremmo gli stessi

---

1 Ciò è applicabile con qualsiasi teoria fisica e non solo: in un altro esempio, ragionando per assurdo, si considerino due persone in procinto di effettuare alcune misurazioni, se per uno stesso fenomeno ottengono misurazioni differenti si invaliderebbe uno dei principio basilare di relatività, ciò potrebbe portare alla conclusione che uno dei due strumenti di misura è difettoso.

risultati per entrami gli SC? Ovviamente no. Per il solito principio per cui quando siamo in una giostra sentiamo una forza che ci spinge verso l'esterno. Abbiamo così scoperto che le leggi delle meccanica sono valevoli[1] solo per alcuni SC. Analizziamo ora un altro esperimento riportato dal *Dialogo sui due massimi sistemi* di Galileo Galilei: «*Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran naviglio [...]; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come [...] le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; [...] e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder cosí, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma: voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; [...] le gocciole cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi»*.

Ne deriva che la nave in moto rettilineo uniforme è un SC del tutto equivalente a un SC in quiete rispetto al quale sono valide le leggi del moto. Da questa argomentazione possiamo trarre il principio di relatività galileiano, ossia se «*tutte le leggi della meccanica sono valevoli per un dato SC, esse lo sono altresì per un qualsiasi SC, in moto uniforme relativamente al primo*»[2]. Se abbiamo due SC in moto non uniforme le leggi della meccanica non sono valevoli. Tali SC, in cui è valido il principio di relatività sopra esposto, si chiamano *inerziali*. La relatività galileiana diventa: *in un sistema di riferimento inerziale tutte le leggi della meccanica sono invariati.* Deriva inoltre che se ogni SC in moto uniforme è un SC inerziale essi esistono in numero infinito, poiché infiniti sono i moti rettilinei uniformi pensabili nello spazio fisico. Possiamo dire, ancora, che gli SC inerziali sono caratterizzati dal fatto che in tutti sussiste la legge di inerzia, secondo la quale un corpo non soggetto a forze esterne mantiene il suo stato di moto uniforme o di quiete[3]. Non costituisce un SC inerziale un autobus durante una frenata oppure che percorre una curva; come non lo è una

---

1 Ottenere gli stessi risultati e dire che le leggi della meccanica sono valevoli in un dato SC è equivalente in quanto la prima dipende dalla seconda.

2 Albert Einstein e Leopold Infeld, L'evoluzione della fisica, p. 154

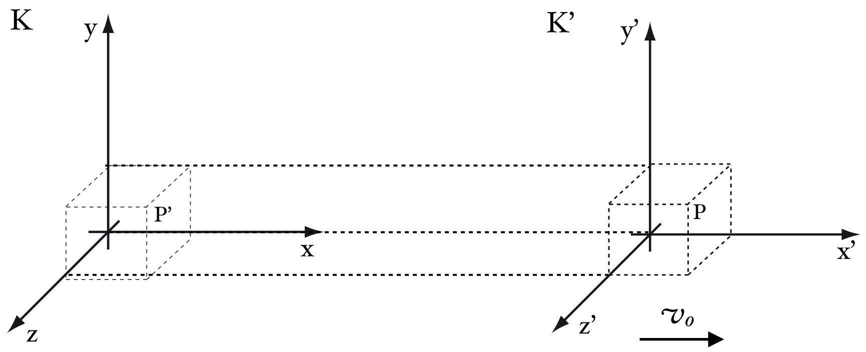
3 Una definizione logica della legge di inerzia è data dallo stesso Galileo ne il *Dialogo sui due massimi sistemi*. Si consideri un piano ideale nel quale una palla posso rotolare senza attrito. In un primo momento la palla è lanciata con una data velocità sul piano inclinato verso il basso. La velocità continua a crescere durante la discesa, tanto più lentamente quanto minore è l'inclinazione del piano. Inversamente, in un secondo momento, si lancia la palla sul piano inclinato verso l'alto. La velocità diminuisce durante la salita, tanto più lentamente quanto minore è l'inclinazione del piano. Si pensi ora, in entrambi le situazioni, di diminuire progressivamente l'inclinazione del piano fino a porlo in posizione orizzontale. Cosa accadrà alla palla in questa nuova situazione, che è il caso limite? L'unica risposta data da Galileo, e logicamente possibile, è che essa continuerà a muoversi all'infinito con la stessa velocità iniziale. Newton darà una definizione differente adottando il punto di vista delle "stelle fisse", dunque un sistema di riferimento assoluto in quiete.

giostra[1] ; e come non lo è il suolo terrestre, e la Terra stessa dato che essa ruota sul proprio asse[2]. Ci soffermeremo più avanti sulle contraddizioni legate ai SC inerziali, tuttavia è bene notare come «il concetto di sistema di rifermento (o coordinate) inerziale sia un concetto limite: la sua grande importanza sta nell'affermare l'*equivalenza tra tutti i sistemi inerziali e ciò* [contribuisce a demolire] *la nozione di fermo assoluto, base della fisica aristotelica*»[3] .

Trasformazioni classiche

Consideriamo il caso di due SC in moto uniforme l'uno rispetto all'altro, da quanto ho esposto fino ad ora, sappiano che entrambi sono inerziali e in entrambi si producono gli stessi effetti. Sorge tuttavia una difficoltà se due osservatori posti nei rispettivi SC si trovino a discutere su osservazioni fatte su uno stesso evento. Entrambi si esprimeranno in modo differente. L'esperienza comune lo conferma: se vediamo una persona che cammina dentro un treno la vedremo camminare con una velocità maggiore rispetto a quella del treno, mentre un osservatore interno obietterà che essa si stia muovendo con una velocità minore del treno. Ma noi sappiamo che in SC inerziali si devono produrre gli stessi risultati, è necessario di conseguenza conoscere come passare da un SC all'altro.

Supponiamo due SC inerziali K e K', costituiti dai seguenti sistemi di coordinate cartesiane tridimensionali paralleli e posti sullo stesso piano, negli assi x, y, e z e x', y' e z', in moto uniforme l'uno rispetto all'altro con una velocità v_0 . La posizione di un evento o di un punto nello spazio rispetto al SC scelto sarà caratterizzato dalle coordinate x, y e z. Per quel che riguarda il tempo, essendo assoluto, scorre indifferentemente in entrambi gli SC ed è misurabile utilizzando un solo orologio, quindi t = t'. Immaginiamo di voler determinare la posizione di un punto P' (x' ; y' ; z') posto in K' e solidale con esso. Quale sarà la posizione di questo punto rispetto a K? Nell'istante t_0 K ≡ K' (K coincide con K'), per cui le coordinate di P' saranno le medesime in entrambi gli SC.



1 Come accennato qualche riga sopra, quando ci si trova su una giostra o su un autobus che sta percorrendo una curva sentiamo una certa forza che ci spinge verso l'esterno. Di conseguenza non sono sistemi di riferimento inerziali e quindi in ivi le leggi della meccanica non sono valide.

2 Tuttavia lo si può considerare tale con buona approssimazione e per tempi relativamente brevi rispetto al suo periodo di rotazione.

3 Giulio Passatore, appunti "Fisica e senso comune".

Nell'istante t_1, come si vede in figura, K' ha percorso un certo spazio $\Delta X = v_0 * \Delta t$ in direzione dello spostamento; dove ΔX è lo spostamento di K' rispetto a K e Δt è l'intervallo di tempo intercorso nello spostamento. Volendo determinare la posizione del punto P, P' rispetto a K, si noti che le coordinate y e z del punto P sono rimaste invariate rispetto a quelle del punto P': $y = y'$ e $z = z'$. Invero la coordinata x del punto P è variata di una quantità ΔX, ne deriva che $x = x' + v_0 * \Delta t$.

Quanto appena descritto è la dimostrazione delle trasformazioni classiche, ossia del metodo matematico che permette di passare da un SC inerziale all'altro. Riassunte nel modo corretto:

$$\begin{cases} x = x' + v_0 \cdot \Delta t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

Considerando ora che P' si muova di moto uniforme con velocità v' rispetto a K', è facile intuire che la velocità v del punto rispetto a K sarà la somma delle velocità di K' rispetto a K e di P' rispetto a K': $v = v' + v_0$. Generalizzando si può dire che la velocità di un corpo in un SC rispetto ad un altro in moto uniforme è data dalla somma vettoriale delle velocità del corpo e del SC:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_o$$

Giunti a questo punto occorre mettere in evidenza che come il tempo scorre in modo identico in entrambi gli SC, sia essi in moto uniforme l'uno rispetto all'altro o meno, anche la distanza tra due punti, o la distanza percorsa da un punto in moto uniforme, sia invariate in entrambi gli SC. Sia P (x; y; z) un punto in moto uniforme con velocità v rispetto a K', anch'esso in moto uniforme con velocità v_0 rispetto a K. In un intervallo di tempo Δt, P avrà percorso un spazio $\Delta x = v * \Delta t$, portandosi nella nuova posizione P' (x + Δx; y ; z). La coordinata x_1 del punto P rispetto a K nell'istante t_1 sarà $x_1 = x + v_0 * \Delta t$, mentre la coordinata x_2 del punto P' rispetto a K sarà $x_2 = (x + \Delta x) + v_0 * \Delta t$. Volendo determinare la distanza $\Delta x'$ tra i punti P e P' rispetto a K basterà fare la differenza delle coordinate x_1 e x_2 dei due punti in valore assoluto:

$$\Delta x' = |x_1 - x_2| = \left| x + \vec{v}_0 \cdot \Delta t - \left[\left(x + \Delta x \right) + \vec{v}_0 \cdot \Delta t \right] \right| = |-\Delta x| = \Delta x$$

Deriva, come da ipotesi:

$$\Delta x' = \Delta x$$

Di conseguenza anche le distanze, o lunghezze, come il tempo, rimangono invariate rispetto a SC in moto uniforme l'uno rispetto all'altro, e più in generale, rispetto alle trasformazioni classiche, esse sono assolute. Questo è un appunto importante, perché come vedremo in seguito, la relatività speciale di Albert Einstein metterà in discussione proprio questo concetto, e in generale le stesse trasformazioni classiche.

Le lunghezze non sono, tuttavia, le uniche invariati. Siano P e Q due punti relativi a K', fra i quali agiscono forze dipendenti esclusivamente dalla distanza. Essendo la distanza invariate rispetto al moto dei SC, anche la forza deve risultare invariate. «In conseguenza la legge di Newton, che stabilisce il nesso tra forza e accelerazione, sarà valevole in entrambi gli SC. Perveniamo così nuovamente ad una conclusione confermata dall'esperienza quotidiana: *se le leggi della meccanica sono valevoli in un SC, lo sono anche in tutti gli SC, in moto uniforme, relativamente al primo*».[1]

Luce e onde elettromagnetiche

Se la luce fosse un'onda qualsiasi, correndole dietro la si sarebbe potuta raggiungere?

David Bodanis

A questo punto dobbiamo soffermarci su qualcosa di completamente diverso: la luce. «Direi, parermi che nella natura si ritrovi una sustanza spiritosissima, tenuissima e velocissima, la quale diffondendosi per l'Universo penetra per tutto senza contrasto, riscalda, vivifica e rende feconde tutte le persone viventi, e di questo spirito par che il senso stesso ci dimostri il corpo del Sole esserne ricetto principalissimo»[2] . Così Galileo Galilei definisce la luce. Apparentemente sembra non centrare molto con l'argomento in questione, ma definire che cosa è la luce, e soprattuto la sua velocità, è molto importante in quanto, come vedremo in seguito, è stata determinante nella formulazione della relatività speciale di Albert Einstein.

Per secoli la luce è stata fonte di enormi divergenze tra i maggiori scienziati di tutto il mondo. Fin dai suoi primi studi essa è stata caratterizzata, e per certi aspetti lo è ancora, dal dualismo onda - corpuscolo. Nel XVII secolo Newton formulò la teoria corpuscolare della luce. Egli vedeva la luce composta da numerose piccole particelle di materia (corpuscoli) emesse in tutte le direzioni. Era matematicamente più semplice della teoria ondulatoria, ma richiedeva l'uso di nuove "sostanze", ossia corpuscoli differenti, per spiegare l'esistenza dei differenti colori. Inoltre non spiegava numerosi fenomeni. A seguito degli esperimenti sulla figure di diffrazione e di interferenza di Huygens e di Young[3], nasce la famosa teoria ondulatoria della luce, e il famoso dualismo onda - corpuscolo. Fu formulata da Christiaan Huygens nel 1678, e la luce veniva vista come *un'onda meccanica* (simile ad un'onda che si propaga in uno stagno). Permetteva di spiegare numerosi fenomeni oscuri alla teoria corpuscolare, tuttavia una caratteristica intrinseca delle onde meccaniche è la necessità di un mezzo ben determinato per potersi propagare. Come le onde sonore si propagano nell'aria, anche le onde luminose devono propagarsi in un qualche mezzo; «immaginarono, sul modello della materia imponderabile, un mezzo che permeava tutto lo spazio ed era il supporto dei fenomeni luminosi: *l'etere*. Gli stati di questo mezzo [...] furono

1 Albert Einstein e Leopold Infeld, L'evoluzione della fisica, p. 158

2 Galileo Galilei lettera del 23 marzo 1614 a Monsignor P. Dini

3 Si ricorda l'esperimento della doppia fenditura.

immaginati di natura meccanica, paragonabili alle deformazioni elastiche dei corpo solidi»[1]. Fu proprio la difficoltà nello spiegare le caratteristiche meccaniche dell'etere che, oltre a mettere in crisi la filosofia meccanicistica che da secoli permeava la fisica, indussero Einstein, in seguito alle scoperte di Maxwell e di Faraday, a formulare la teoria della relatività speciale «tagliando il nodo dell'etere con l'acutezza della sua logica e gettando gli aggrovigliati pezzi della parola etere fuori dalla finestra del tempio della scienza fisica»[2]. Tale teoria perdurò sino a Maxwell, tuttavia, con la stravolgente introduzione delle onde elettromagnetiche[3].

Inseguito si ha un ritorno alla teoria corpuscolare con la spiegazione, ad opera di Einstein e di Max Planck, dell'effetto fotoelettrico con l'introduzione del famoso fotone e della teoria dei quanti di energia. Oggi viene spiegata dalla meccanica quantistica con entrambe le caratteristiche, a seconda delle situazioni.

Velocità della luce

Fin dai primi tempi dello sviluppo della fisica, la luce si pensava avesse velocità infinita, che si propagasse istantaneamente. Ed in effetti l'esperienza comune potrebbe apparentemente rivelarne la veridicità. Nel 1581 Galileo Galilei fu il primo a concepire con estrema lucidità l'idea di misurare la velocità della luce. «L'idea era molto semplice [...]. In una notte d'estate una coppia di volontari avrebbe dovuto azionare un sistema di lanterne sui versanti di due colline adiacenti, poste ad una distanza di un chilometro e mezzo l'una dall'altra. Costoro avrebbero dovuto togliere gli otturatore delle lampade una dopo l'altra: infatti il secondo operatore aveva l'incarico di mandare un segnale di risposta al collega sul versante opposto non appena lo avesse raggiunto il primo bagliore, in modo da poter misurare il tempo impiegato dalla luce ad attraversare la vallata»[4]. L'intuizione era a dir poco geniale, soprattuto per l'epoca, ma la tecnologia poco preparata. Noi oggi sappiamo che per la luce un chilometro e mezzo di distanza equivalgono a pochi millesimi di secondo[5]. Galileo si accorse di misurare sempre lo stesso tempo, quello di reazione del suo amico. L'esperimento fallì, ovviamente la luce era troppo veloce.

Fu quasi un secolo e mezzo più tardi che grazie allo sviluppo della teoria ondulatoria e dell'ottica geometrica, Jean-Bernard-Léon Foucault (1819-1868) riuscì a mettere in pratica la linea seguita da Galileo e a determinare la velocità della luce con notevole precisione. In linea di principio l'apparecchio sfrutta la riflessione della luce su uno specchio rotante. Foucault misurò c = 313 000 chilometri al secondo.

1 Albert Einstein, Come io vedo il mondo, p. 85

2 George Gamow, Biografia della fisica

3 Inizialmente la teoria di Maxwell fu presa in considerazione (anche dallo stesso Maxwell) ancora in un ottica meccanicistica e si dava all'etere la capacità di diffondere tali onde, pur, come evidenziava la teoria, tali onde essere dipendenti esclusivamente dall'interazione elettromagnetica, e non da un cambiamento di stato di una qualche sostanza, come nelle onde sonore. In seguito ai problemi legati all'etere, fu il genio di Einstein ad eliminare la parola etere dall'edificio della scienza: lo spazio possiede la proprietà intrinseca di propagare le onde elettromagnetiche.

4 David Bodanis, $E = MC^2$, p. 43

5 Approssimando $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, si ha $t = \Delta s / c = 1{,}5 \cdot 10^3 / 3 \cdot 10^8 = 5 \,.\, 10^{-6}$ s; ossia 0,000005 s

Malgrado il risultato ottenuto, l'apparecchio fu perfezionato da Albert Michelson (1852-1931), ottenendo c = 299 796 chilometri al secondo, valore che venne universalmente riconosciuto esatto sino alle moderne misurazioni.

Oggi la velocità della luce, $c = 2{,}99\ 792 \cdot 10^8$ metri al secondo, è misurata con un grado si accuratezza tale, che viene usata per definire il metro: un metro è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in $1/c$ *s*.[1]

La luce è un'onda elettromagnetica

Al giorno d'oggi sappiano universalmente che la luce è un'onda elettromagnetica al pari delle onde che permettono di ascoltare la radio, vedere la televisione o parlare al telefono cellulare. Ma all'epoca non era così. Nella seconda metà dell'800', agli albori delle equazioni di Maxwell e della teoria dell'elettromagnetismo, nulla si sapeva sulla correlazione tra la «luce», ciò che permette di vedere, e l'elettromagnetismo. Esperimenti sull'elettricità e sul magnetismo e i particolari fenomeni prodotti, per esempio, la possibilità di generare un campo magnetico da un campo elettrico, e viceversa condussero alla formulazione della teoria dell'elettromagnetismo la quale, sostanzialmente, unisce quello che è il campo elettrico con il campo magnetico, in un campo elettromagnetico. In particolare si è scoperto che un campo elettrico variabile genera un campo magnetico variabile, che a sua volta genere un campo elettrico variabile e così via, per usare le parole di Bodanis, «elettricità e magnetismo si rincorrono saltellando letteralmente uno sull'altro, quasi fossero avvinghiati un mutuo abbraccio»[2]. Un esempio potrebbe chiarire le idee: immaginiamo una piccola sfera dotata di carica elettrica costretta ad oscillare rapidamente e ritmicamente a mo' di pendolo. L'oscillazione della carica genera un campo elettrico variante e ogni variazione di un campo elettrico genera un campo magnetico; ogni variazione di un campo magnetico genera un campo elettrico; ogni variazione di... e così via. E siccome il campo [elettromagnetico] rappresenta energia, tutte queste variazioni che si diffondono nello spazio, con velocità determinata, producono un'onda, la cosiddetta onda elettromagnetica[3]. Oltre che ad essere predetta teoricamente dalle equazioni di Maxwell, essa è stata, poi, sperimentalmente provata da Herz che riuscì a trasmettere e a ricevere un'onda elettromagnetica.

Quale correlazione vi è, dunque, con la luce? Il primo a intuire una qualche correlazione fu Michael Faraday nel 1846. Egli elaborò un esperimento che poteva spiegarsi soltanto ammettendo che la luce fosse un'onda elettromagnetica. Nel frattempo ho detto che un'onda elettromagnetica si propaga con una velocità determinata. Ma quanto? Con un procedimento matematico si può dimostrare che la velocità di un'onda elettromagnetica è:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$$

dove ε_0 (epsilon zero) rappresenta la costante dielettrica del vuoto e μ_0 (mu zero) la permeabilità magnetica nel vuoto. Entrambe queste grandezze, si può dire, rappresentino la capacità di

1 $1/c = 1/299792458 = 3{,}34 \cdot 10^{-9}$ s

2 David Bodanis, $E = mc^2$, p. 52

3 Albert Einstein e Leopold Infeld, L'evoluzione della fisica, p. 145

un campo elettrico e magnetico di propagarsi in una sostanza, in questo caso il vuoto. Se sostituiamo i valori[1] si ricava:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \cong 2{,}994629456 \cdot 10^8 m/s$$

Notiamo che questo valore è molto simile a quello trovato da Michelson per la velocità della luce. Se a ciò aggiungiamo gli esperimenti di Faraday e l'enorme similitudine tra un'onda elettromagnetica e un'onda luminosa[2], non cadremo in contraddizione con nessuna spiegazione dei fatti ottici, ammettendo altresì che *l'onda luminosa sia di natura elettromagnetica*[3]. «La luce [...] era semplicemente formata da questo susseguirsi rapido di saltelli, in cui elettricità e magnetismo si divertivano a giocare alla cavallina»[4].

Esperimento di Michelson - Morley

Qualche pagina prima si è parlato di principio di relatività galileiano e di trasformazioni classiche. Ogni legge della meccanica deve essere invariante rispetto alle trasformazioni classiche, ossia ogni legge della meccanica deve produrre gli stessi effetti e gli stessi risultati in un qualsiasi SC inerziale. Tuttavia nulla ci vieta di supporre che anche le leggi dell'elettromagnetismo e conseguentemente i fenomeni luminosi devono rispondere a tale principio di relatività. Consideriamo un raggio luminoso che ha velocità *c* rispetto ad un SC inerziale K. Immaginiamo un altro SC inerziale K' in moto uniforme rispetto K con velocità *v*. Quale sarà la velocità *v'* del raggio luminoso rispetto a K'? Ammettendo che le trasformazioni classiche siano corrette, si può concludere $v' = v + c$. Ossia un raggio luminoso in un SC inerziale in moto uniforme ha una velocità diversa da *c* che dipende dalla direzione di quest'ultimo. Per le sue proprietà fisiche, K può perciò essere distinto da tutti gli altri SC in movimento rispetto ad esso[5]. Concludiamo che K può rappresentare, di conseguenze, un sistema di riferimento fondamentale o assoluto, in riposo rispetto all'etere, nel quale alcune leggi della meccanica sono differenti. «Ciò significa ammettere l'esistenza di un oceano d'etere [o un sistema di riferimento privilegiato, assoluto] nel quale tutti gli SC si trovano immersi, siano essi a riposo o in moto relativamente ad esso»[6]. Queste considerazioni portano ad una contraddizione con il principio di relatività galileiano e il principio stesso di inerzia secondo cui tutti gli SC inerziali in moto uniforme siano equivalenti. Inoltre, come Galileo ha dimostrato, se abbiamo due SC in moto uniforme non ha senso domandarci quale di essi sia in riposo e quale sia in movimento, in quanto è impossibi-

---

1 $\varepsilon_0 = 8{,}854187817\ 10^{-12}$ F/m; $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m

2 Entrambe sono onde trasversali, al pari delle onde che si propagano in uno stagno. Prima della formulazione dell'elettromagnetismo, si è provata la trasversalità delle onde luminose per vie ottiche, con un esperimento sulla polarizzazione. Nell'onda elettromagnetica il campo elettrico e magnetico giacciono in piani perpendicoli rispetto alla direzione di propagazione, per cui è un'onda trasversale.

3 Albert Einstein e Leopold Infeld, L'evoluzione della fisica, p. 147

4 David Bodanis, $E = mc^2$, p. 52

5 Albert Einstein, Il significato della relatività, p. 38

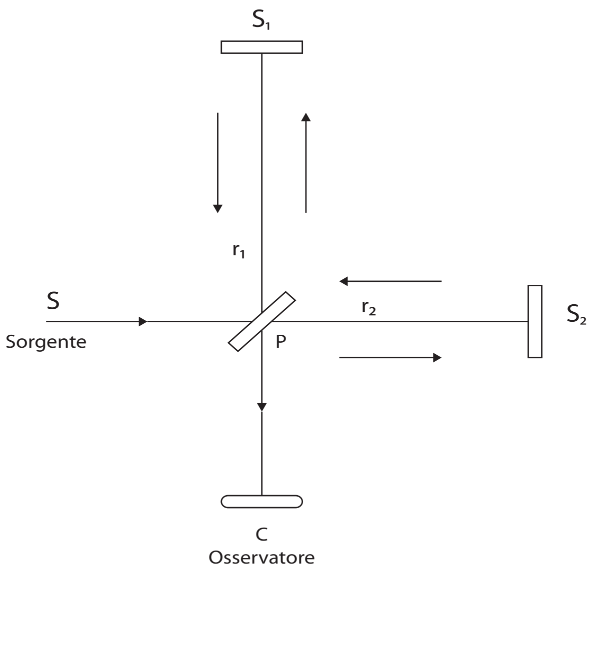
6 Albert Einstein e Infeld Leopold, L'evoluzione della fisica, p. 165

le, con le leggi della meccanica, stabilire se esso si trovi in moto o fermo rispetto ad un altro SC. Ammettendo, tuttavia, che vi sia un SC assoluto, cade il principio di relatività galileiano, e con esso le trasformazioni classiche, e sarebbe allora possibile stabilire quale, in riferimento all'etere, sia in riposo o in moto, confrontando le leggi valevoli in un SC con quest'ultimo a termine di paragone. Si potrebbe andare avanti all'infinito senza perseguire ad una conclusione logicamente valida: è evidente che è impossibile conciliare queste due proposizioni. «La sola via d'uscita sembra dunque essere quella di rinunciare al principio galileiano di relatività e di mettere alla prova la supposizione che tutti i corpi si muovano attraverso un oceano d'etere immobile»[1]. Sintetizzando possiamo dire che la luce possiede la stessa velocità *c* in tutte le direzioni soltanto nel SC privilegiato, ossia l'etere, ma non in un qualsiasi SC in moto uniforme rispetto all'etere.

L'esperimento appena considerato si rileva, per le sue conseguenza, di estrema importanza, ed è necessario, quindi, riuscire ad elaborare un sistema che ci permetta di verificare le nostre ipotesi. La natura ci offre un sistema che fa al caso nostro: la Terra nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole.

L'idea generale è che la velocità della luce rispetto alla Terra risulti dalla composizione classica delle velocità, ossia dalla somma della velocità della luce nell'etere e la velocità della Terra rispetto all'etere: $\vec{v}' = c + \vec{v}$ (secondo le direzioni).

Un primo esperimento fu condotto da Albert Abraham Michelson nel 1881 che decise di misurare la velocità della Terra rispetto all'etere. Tuttavia i risultati furono poco soddisfacenti e l'esperimento fu affossato da ferventi critiche circa la precisione dello strumento ideato da Michelson e dei risultati. Nel 1887 decise così di ripetere l'esperimento più importante della storia della fisica, perfezionando lo strumento con l'aiuto del chimico Edward Williams Morley.



Lo strumento da lui ideato è sostanzialmente un interferometro[2]. Nel secondo esperimento, rispetto al primo, l'interferometro fu montato sopra una grande pietra galleggiante su mercurio liquido, onde evitare qualsiasi tipo di interferenza esterna. Se effettivamente la luce ha velocità differenti, i due bracci dell'interferometro sarebbero stati percorsi in tempi differenti e avrebbero prodotto un'immagine di interferenza. Ruotando, poi, l'apparecchio di 90° si sarebbe dovuto rilevare uno spostamento delle frange di interferenza. Consideriamo l'appa-

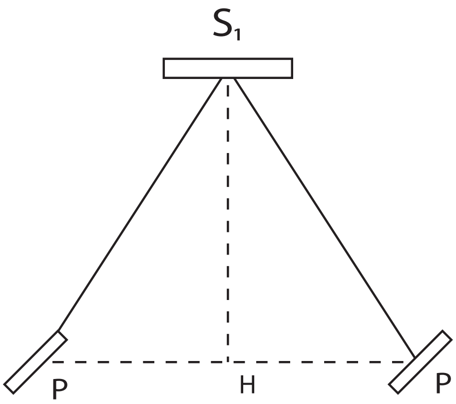
1 Ibidem, p. 165

2 Un interferometro è un apparecchio in grado di sdoppiare un fascio di luce monocromatico mediante uno specchio semitrasparente posto a 45° rispetto al fascio. I due fasci prodotti vengono poi fatti riflettere su due specchi e riuniti nello specchio semitrasparente e mandati in uno schermo o rilevatore. Se il cammino dei due fasci è differente, ossia se i due specchi sono disposti a distanze differenti dallo specchio semitrasparente, sullo schermo si formerà un immagine di interferenza.

rato ideato da Michelson nello schema sopra[1]: S è una sorgente di luce monocromatica, che emette un fascio luminoso nella direzione SP. P è uno specchio semitrasparente, posto con un angolo di 45° rispetto al fascio di luce, che riflette una parte del fascio in direzione S1, mentre l'altra viene trasmessa in direzione S2. I fasci *r1* ed *r2*, a loro volta, riflettono sugli specchi, rispettivamente S1 e S2, e si riuniscono in P, dove vengono mandati all'osservatore C. Supponiamo inizialmente che l'interferometro sia orientato in modo che il braccio SS2 sia parallelo al movimento di rivoluzione della Terra. Rispetto all'apparato il raggio *r2* si muoverà di conseguenza con velocità $c + v$ in direzione S2, mentre $c - v$ in direzione P. Nota la distanza L = PS2, con alcuni semplici passaggi si può esprimere il tempo t_1, che la luce impiega a percorrere, andata e ritorno, la distanza tra P e S2:

$$t_1 = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} \cong \frac{2L}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Considerando invece il secondo braccio PS1, il raggio è perpendicolare al moto, di conseguenza, sempre tenendo conto che tutto l'apparato si muove rispetto all'etere, non percorrerà una traiettoria rettilinea, bensì una traiettoria come mostrato in figura:



mentre il raggio di luce è in cammino in direzione S1, questi e P, si sono spostati in direzione del moto. Per determinare il tempo t_2 impiegato dalla luce a percorre la distanza tra i due specchi, dato che PS1 = S1P, basterà calcolare il tempo impiegato per percorre PS1 tenendo conto che questo verrà percorso due volte. Tramite alcuni passaggi, considerando il triangolo rettangolo PHS1, si può calcolare il tempo t2:

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \cong \frac{2L}{c}\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

Si osservi che i tempi *t1* e *t2* sono differenti, di conseguenza, i raggi luminosi arriveranno all'osservatore C con una certa differenza di cammino, quindi saranno sfasati tra di loro e daranno origine a frange di interferenza. Ruotando l'apparecchio di 90°, rispetto all'asse passante per lo specchio P, la velocità orbitale della Terra si sommerà al raggio orizzontale e, conseguen-

1 Rispetto allo strumento del secondo esperimento sono stati aggiunti degli specchi al fine di aumentare il cammino della luce, qui non rappresentati.

temente ai tempi, varieranno le differenze di cammino sino ad invertirsi. Si dovrebbe osservare dunque uno spostamento graduale delle frange di interferenza.

Tuttavia non fu osservato nessuno spostamento: «lo spostamento che ci si aspettava era di 0,4 frange. Lo spostamento reale risultò certamente minore della ventesima parte di questo, e probabilmente minore della quarantesima parte»[1].

In conclusione, l'esperimento di Michelson - Morley, era nato per dimostrare che la luce ha velocità differenti in accordo con le trasformazioni galileiane e all'idea di etere. Il fallimento dell'esperimento non può che mettere in evidenza la fallibilità delle idee di partenza: l'invalidità delle leggi di trasformazione classica e la distruzione dell'idea stessa di etere. Malgrado ciò molti scienziati si arrovellarono nel disperato tentativo di salvare l'impossibile, furono individuate altre motivazioni secondo le quali l'esperimento fallì: si pensò che la Terra fosse solidale con l'etere; che la Terra trascini parzialmente l'etere nel suo moto; e ancora, che il braccio dell'interferometro si accorci. Ma alla prova dell'esperienza nessuna di tali teoria ha potuto reggere. «Si creò così una delle più drammatiche situazioni che la storia della scienza ricordi. Tutte le supposizioni concernenti l'etere non concludeva a nulla. Il verdetto degli esperimenti era ed è sempre stato negativo. [...] L'etere divenne *l'enfant terrible* della famiglia delle sostanza fisiche. In primo luogo la costruzione di una immagine meccanica semplice dell'etere si rilevò impossibile, e venne perciò scartata, il che contribuì non poco alla rovina della concezione meccanicistica. In secondo luogo si dovette abbandonare la speranza che mercé l'esistenza di un oceano d'etere si disponesse di un SC privilegiato, mediante il quel fosse possibile accertare il moto assoluto. [...] Tutti i tentativi di fare dell'etere una realtà sono falliti. [...] Sembra giunto il momento di dimenticare l'etere e di non pronunciarne più il nome»[2]. Ne deriva che, come la teoria di Maxwell aveva già messo in evidenza, le onde elettromagnetiche, e con esse la luce, non hanno bisogno di nessun supporto materiale: «L'unica nostra via d'uscita sembra essere quella di tener per certo che lo spazio possiede la proprietà fisica di trasmettere le onde elettromagnetiche, senza troppo preoccuparci del significato di questa affermazione»[3].

Una conclusione di straordinaria importanza dell'esperimento di Michelson - Morley, che sfuggì ai più, non poteva non essere colta da un eccentrico scienziato di nome Albert Einstein: la velocità della luce è uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali e non dipende dallo stato di moto della sorgente luminosa o dell'osservatore. Questa, è la spiegazione del fallimento dell'esperimento. Non poteva essere rilevata nessuna differenza di velocità della luce, semplicemente perché essa non varia.

1 A.A.Michelson, E.W.Morley, On the relative motion of Earth and the luminiferous ether, American Journal of Science, 1887

2 Albert Einstein e Infeld Leopold, L'evoluzione della fisica, p. 168

3 Ibidem, p. 149

Relatività Speciale

La teoria della relatività sorse per necessità di cose delle gravi e profonde contraddizioni insite dell'antica teoria, contraddizioni dalle quali sembrava non esserci via d'uscita. La forza della nuova teoria risiede nella coerenza e semplicità con cui tutte le difficoltà vengono risolte ricorrendo soltanto a pochi e plausibili presupposti.

Albert Einstein

Modificando il principio galileiano di relatività, ammettendo, quindi, che anche i fenomeni elettromagnetici come quelli meccanici devono essere gli stessi in ogni SC inerziale, o più semplicemente, che *tutte le leggi naturali devono avere la stessa forma in ogni SC inerziale*, si è arrivati a delle conclusioni insolite: le trasformazioni classiche non sono valevoli e la velocità della luce deve essere la stessa indipendentemente dallo stato di moto della sorgente o dell'osservatore.

Nel 1905 Albert Einstein pubblica la Relatività Speciale, una nuova teoria della relatività in grado di risolvere e spiegare in modo sistematico, coerente e più semplice possibile, le contraddizioni e le conseguenze nate con l'affermazione delle suddette ipotesi, ampiamente suffragate dall'esperienza, come dimostrò l'esperimento di Michelson - Morley.

La relatività speciale si basa dunque su due postulati:

1) Tutte le leggi della natura devono essere le stesse in tutti gli SC inerziali;

2) La velocità della luce, nel vuoto, è la stessa in tutti gli SC inerziali.

Apparentemente i principi enunciati non sembrano essere logicamente compatibili, ma invero, dobbiamo dimenticarci del passato, «la teoria della relatività ristretta è giunta finalmente a realizzare quest'unione logica modificando la cinematica, vale a dire la dottrina delle leggi concernenti lo spazio e il tempo»[1].

Tempo e spazio

Poniamoci la seguente domanda: dato un evento con coordinate cartesiane x, y, z e tempo t rispetto ad un SC inerziale K, in che modo è possibile calcolare le coordinate x', y', z' e il tempo t' rispetto ad un SC K' in moto rispetto a K? Nella fisica pre-relativistica, come abbiamo visto, ciò era risolto mediante le trasformazioni classiche, ammettendo che il tempo sia assoluto, ossia che scorra indifferentemente in entrambi gli SC, ovvero, ancora, che se un evento accade dopo un tempo t in un SC, accadrà, *simultaneamente,* dopo lo stesso tempo t, anche nell'altro SC. Ora sappiamo che è impossibile che un osservatore in un SC in moto uniforme veda simultaneamente un evento accaduto in un altro SC, la luce viaggia sempre alla stessa velocità c. Un esempio può chiarire le idee. Si consideri una stanza in moto uniforme e si immagini che un segnale luminoso venga lanciato dal centro della stanza. Un osservatore interno commenterà,

1 Albert Einstein, Come io vedo il mondo, p.76

dato che la velocità della luce è la stessa, che essa raggiungerà simultaneamente le pareti della stanza. Un osservatore esterno, invece, dato che la stanza si muove, vede una delle pareti allontanarsi dal raggio luminoso, mentre l'altra raggiungerlo; commenterà, dunque, che una delle due pareti verrà raggiunta dal raggio un po' dopo la seconda. In termini più matematici possiamo considerare due SC inerziali cartesiani K e K', con K' in moto rispetto a K con velocità v. Un raggio luminoso viene lanciato nell'istante t_0 dall'origine degli assi. Si consideri un punto P (x; y; z) in K e il tempo t necessario al raggio luminoso per raggiungere P. Siano x', y', z' le coordinate di P in K' quando l'osservatore in K' vede P raggiunto dal raggio. Secondo la meccanica classica la distanza Δs tra l'origine e il punto P deve essere $c \cdot t$, mentre $\Delta s'$ deve essere $c' \cdot t$. Secondo i postulati della relatività, invece, la velocità della luce deve essere la stessa. Siccome la distanza non può essere uguale, gli intervalli temporali devono essere diversi: la valutazione temporale è diversa per i due osservatori. Quindi $\Delta s'$ diventa $c \cdot t'$, con $t' \neq t$[1]. In poche parole l'osservatore posto in K' si sta muovendo rispetto all'evento; siccome "l'informazione" dell'evento, ossia l'avvertimento di esso, giunge mediante la luce, essendo essa finita e costante, arriverà a destinazione in tempi diversi. La situazione può sembrare paradossale ma è chiaro, tuttavia, che tali considerazioni si hanno in concomitanza, e verranno notevolmente accentuate, con una notevole distanza tra i due eventi[2] e una velocità del sistema di riferimento prossima a quella della luce.

Accade che a velocità confrontabili con quella della luce il concetto assoluto di simultaneità perde significato e il tempo diviene relativo al sistema di riferimento scelto. Eventi simultanei in un SC, possono non esserlo in un altro. Di conseguenza «dire che eventi sono simultanei non ha un significato che in rapporto a un sistema di coordinate»[3].

Dovendo dare una definizione di simultaneità, si deve necessariamente tenere conto della costanza della velocità della luce. Nella fisica pre-relativistica si è detto che per misurare il tempo è sufficiente un solo orologio, ma ora, dovendo trattare con simili velocità, risulta alquanto difficile misurare tempi di eventi che si verificano a distanze considerevoli dall'orologio. Risulta, quindi, necessario disporre di molti orologi uguali in vari punti del sistema K in quiete con esso. Di fondamentale importanza è la sincronizzazione degli orologi: siccome si trovano in quiete rispetto a K, devono segnare lo stesso tempo.

Consideriamo un orologio A che segna il tempo t_a e dal quale parte un segnale luminoso che raggiunge un orologio B posto ad una distanza s_{ab}. Considerando la costanza della velocità della luce, il tempo misurato da quest'ultimo sarà dato dalla relazione $t_b = t_a + s_{ab}/c$. Ciò vale *solo ed esclusivamente* per tutti gli orologi in quiete rispetto a K. Tramite il principio della costanza della velocità della luce tale relazione può essere considerata valida e priva di contraddizioni. Possiamo, quindi, definire simultaneità: «due eventi che accadono nei punti A e B del sistema K

---

1 Ne deriva che siccome $\Delta s - c\,t = 0$ deve necessariamente essere anche $\Delta s' - c\,t' = 0$. Queste due equazioni non sono altro che il principio della costanza della velocità della luce, rispettivamente, rispetto a K e a K'; ma poiché la velocità della luce deve essere invariante rispetto a qualsiasi SC in moto uniforme, esse devono essere invariati rispetto alle trasformazioni che nasceranno dalla nuova teoria.

2 Beninteso che per evento si intende un fatto che accade in un dato luogo e in un certo istante: L'evento della rivelazione del raggio che colpisce P avverrà in tempi diversi in K e in K', per cui si può parlare di due eventi.

3 Albert Einstein, Come io vedo il mondo, p.76

sono simultanei se appaiono nel medesimo istante quando vengono osservati dal punto medio M dell'intervallo AB. Il tempo è in questo caso definito come l'insieme delle indicazioni di orologi simili, in quiete rispetto a K, che registrano simultaneamente lo stesso istante»[1] . In sostanza, quindi, due eventi sono simultanei se «nell'istante in cui si producono, gli orologi sincronizzati situati nella loro vicinanza immediata indicano lo stesso tempo»[2]. *Contemporaneità*, pertanto, ***non è una proprietà intrinseca alla relazione tra due eventi***.

«La fisica classica non conosceva che il tempo assoluto per tutti gli osservatori. [Il continuo dello spazio-tempo poteva venir scisso in due continui separati] in ragione del carattere assoluto attribuito al tempo. [...] Secondo la teoria della relatività [...] non è più lecito scindere il continuo bidimensionale in due continui unidimensionali[3]. Spazio e tempo non vanno considerati separatamente allorché si determinano le coordinate del tempo-spazio in un altro SC»[4]. Come si vede nella nuova fisica tempo e spazio non possono essere presi singolarmente: l'uno è legato all'altro nel formare il sistema di riferimento. Lo spazio e il tempo non sono più assoluti, si deve considerare ***un continuum spazio - temporale indivisibile in cui le distanze e gli intervalli temporali variano al mutare del sistema di riferimento***.

In questo senso si deve notevole progresso e una creazione di una veste formale più elegante con la costruzione dello spazio-tempo quadridimensionale[5] da parte di Hermann Minkowski, dando finalmente un'interpretazione geometria ai concetti della relatività ristretta. Se il tempo non è più assoluto ed è parte caratterizzante di un evento, come lo sono le tre coordinate spaziali, sarà necessario legare indissolubilmente la coordinata temporale alle coordinate spaziali. «Quando si è rinunciato all'ipotesi del carattere assoluto del tempo, in particolare della simultaneità, la quadrimensionalità dello spazio-tempo è stata immediatamente riconosciuta. La realtà fisica non è né quella del punto dello spazio né quella dell'istante di tempo in cui qualcosa accade, bensì solo quella dell'evento stesso»[6] caratterizzato dalla quaterna x, y, z, t.

Dilatazione temporale

Al fine di rendere logicamente compatibili i suddetti postulati si deve necessariamente modificare la concezione dello spazio-tempo. Una delle considerazioni più importanti, e alquanto lontana dal senso comune, è la famosa dilazione temporale: «Se la velocità della luce è la stessa in tutti gli SC, allora, [...] gli orologi in moto devono mutare di ritmo»[7]. Immaginiamo il seguente esperimento. Consideriamo un sistema ottico composto da un emettitore B di raggi

---

1 Albert Einstein, Il significato della relatività, p.39

2 Albert Einstein e Infeld Leopold, L'evoluzione della fisica, p. 173

3 Nella fisica classica per ragioni di praticità il tempo viene preso separatamente dalle coordinate spaziali. Per continuo bidimensionale si intende la coordinata di tempo e la coordinata spaziale x, che determina un evento, che nella fisica classica viene, appunto scisso. Al contrario nella fisica relativistica avrebbe poco senso.

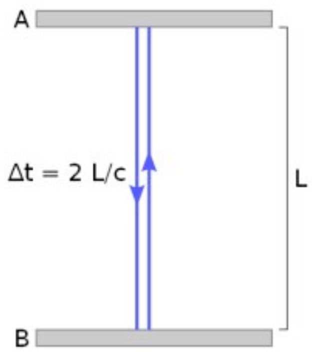
4 Ibidem, p. 195

5 Viene semplicemente chiamato spazio-tempo di Minkowski; molto brevemente esso è costituito dalle tre dimensioni spaziali euclidee con all'aggiunta della coordinata temporale immaginaria.

6 Albert Einstein, Il significato della relatività, p. 41

7 Albert Einstein e Infeld Leopold, L'evoluzione della fisica, p. 177

luminosi, uno specchio A posto ad una distanza L da B e un rilevatore posto ad una distanza molto vicina dall'emettitore, tale che si possa considerare che i due eventi avvengano nella stessa coordinata spaziale.



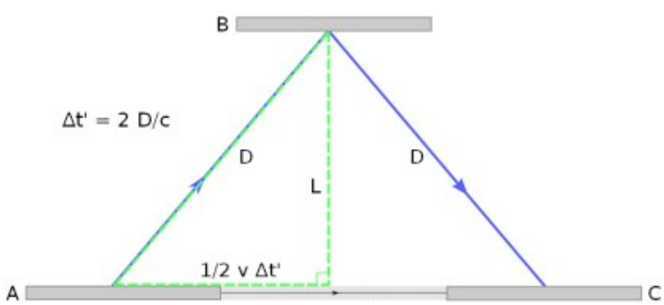
Si noti che per un osservatore in quiete rispetto allo strumento, la distanza L percorsa dalla luce, alla velocità c, sarà:

$$L = \frac{1}{2} c \Delta t_0$$

Da cui si può ricavare il tempo impiegato dalla luce a percorre la distanza L, rispetto ad un osservatore in quiete.

Immaginiamo ora di potare il nostro sistema su un vagone, che costituirà il nostro SC, in moto uniforme con velocità v rispetto ad un osservatore esterno. Volendo determinare il tempo impiegato dalla luce a percorre la distanza doppia AB rispetto ad un osservatore esterno, si deve tenere in considerazione quanto detto poc'anzi: non si può parlare di simultaneità se non in riferimento al proprio SC. Ossia i due eventi, l'emissione e la rilevazione, non accadranno negli stessi istanti in entrambi gli SC e di conseguenza la distanza AB non è più L: essendo l'SC in moto e il sistema ottico muoversi con esso, l'osservatore esterno non vedrà compiere dalla luce la stessa traiettoria rettilinea e i due eventi non coincideranno più ad una medesima coordinata spaziale. Nel frattempo che il raggio luminoso si trova nel suo cammino, per un osservatore esterno, il sistema, e quindi il rilevatore, si è spostato dall'emettitore di una distanza $\Delta x = v\ \Delta t'$.

Consideriamo la figura seguente:



Vogliamo, dunque, determinare il tempo $\Delta t'$ impiegato dalla luce a percorre la distanza 2D rispetto ad un osservatore esterno. Considerando metà del tragitto percorso dalla luce la distanza D si può esprimere come:

$$\begin{cases} D^2 = L^2 + \frac{1}{4} v^2 \Delta t'^2 \\ D^2 = c^2 \frac{1}{4} \Delta t'^2 \end{cases}$$

Sostituendo i valori e risolvendo rispetto Δt', si ottiene:

$$c^2 \Delta t'^2 - c^2 \Delta t_0^2 - v^2 \Delta t'^2 = 0$$

$$\Delta t' = \Delta t_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Solitamente si usa porre uguale a γ (gamma) il termine sotto radice:

(1)
$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \gamma$$

Quindi:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t_0$$

La relazione esprime la dilatazione temporale che subiscono gli intervalli di tempo misurati in un SC in moto uniforme rispetto ad un altro SC in quiete: Δt_0 viene definito intervallo di tempo proprio, ossia intervallo di tempo fra due eventi misurato da un osservatore in quiete rispetto ai due eventi, che accadono nello stesso punto dello spazio; $\Delta t'$ indica, invece, l'intervallo di tempo "dilatato", ovvero l'intervallo di tempo misurato da un osservatore in moto uniforme rispetto ai due eventi, che non avvengono nello stesso punto dello spazio. Poiché in genere $v < c$ dalla (1) risulta essere $\gamma > 1$, quindi $\Delta t'$ è sempre maggiore di Δt_0, ovvero: in un qualsiasi SC inerziale in moto uniforme rispetto ad un osservatore in quiete, il tempo scorre più lentamente che in un SC in quiete rispetto all'osservatore[1], si usa dire che in un SC in moto uniforme il tempo si dilata. Ovviamente, come risulta facendo semplici calcoli, tali effetti sono tanto più evidenti quanto più la velocità si avvicina a quella della luce.

1 Invero questa affermazione non è del tutto corretta. Considerando due SC inerziali, A in moto rispetto a B, potremmo essere tentati ad affermare che il tempo scorre più lentamente in A rispetto che in B. Ma A potrebbe obbiettare che è B a muoversi, e quindi che il tempo scorre più lentamente in B. Entrambi gli osservatori avrebbero dunque ragione ad affermare che in entrambi gli SC il tempo scorra più lentamente. Tuttavia, come detto sopra, si deve considerare che l'intervallo di tempo più breve si riscontra nell'SC nel quale i due eventi appaiano nello stesso punto dello spazio. Altresì quello più lungo nell'SC in cui i due eventi sono separati da una distanza x. Più che il moto relativo tra due SC, quindi, sarebbe più corretto prendere in considerazione la distanza che separa i due eventi.

Dalla (1) si può, ancora, osservare che se $v \ll c$ (v molto minore c), ossia per velocità ordinarie, il termine $v^2 / c^2 \rightarrow 0$ (v^2 / c^2 tende a 0) e così $\gamma \rightarrow 1$. Si ricava dunque la relazione galileiana: per velocità molto minori di *c*, il tempo scorre indifferentemente in entrambi gli SC, ossia $\Delta t' = \Delta t_0$[1].

Si noti come la nuova teoria non sia nata per soppiantare la precedente, quanto piuttosto per assorbirla in un più ampio disegno, capace di spiegare una moltitudine maggiore di fenomeni, e in cui «vi ritroviamo gli antichi concetti quali caso limite, allorché le velocità sono piccole. Dal punto di vista della teoria della relatività è facile discernere in quali casi la fisica classica è valevole e quali ne sono le limitazioni. Sarebbe altrettanto ridicolo applicare la teoria della relatività al moto di vetture, di navi e di treni, quanto volersi servire di una [...] calcolatrice nei casi in cui basta la cosiddetta tavola pitagorica»[2].

Sempre osservando la (1) si può cogliere un'altra importantissima osservazione. Se v > c risulta $v^2 / c^2 > 1$ e il radicando assumerebbe valore negativo, il che renderebbe γ un termine immaginario senza alcun significato fisico: più semplicemente l'equazione risulterebbe impossibile[3]. Ne deriva che *la massima velocità ammessa dalla relatività è la velocità della luce.* Ammesso di poter raggiungere la velocità della luce, non potremmo immettere più carburante? Ovviamente non è possibile: con l'aumento della velocità di un oggetto, come vedremo in seguito, aumenta anche l'energia necessaria ad innalzarne la velocità; è chiaro che per raggiungere un valore di velocità prossimo a quello della luce è necessario un enorme quantità di energia, per superarlo di conseguenza, sarebbe necessario, probabilmente, altrettanta energia[4].

Analizziamo un'altra considerazione si può ancora notare che se $v \rightarrow$ c, $v^2 / c^2 \rightarrow 1$, quindi $\gamma = \rightarrow \infty$[5]. Ciò equivale a dire che se un SC potesse mai raggiungere la velocità della luce, in esso la dilatazione temporale fra due eventi sarebbe infinita, ossia il tempo non scorrerebbe affatto. Immaginando di poter passare una giornata su un raggio luminoso vedremmo le lancette del nostro orologio non girare per niente. Questa è la spiegazione per cui il fotone, il mediatore dell'interazione elettromagnetica teorizzato da Einstein e Punk per descrivere l'effetto foto-

---

1 In realtà il tempo si dilata lo stesso. Considerando v = 100 km/h e l'intervallo di tempo Δt_0 = 1 h, la differenza nella misura temporale è di $1{,}54 \cdot 10^{-11}$ s, ossia 0,0000000000154 s. Come si vede è decisamente trascurabile.

2 Albert Einstein e Infeld Leopold, L'evoluzione della fisica, p. 182

3 Estrarre la radice quadrata di un numero negativo risulta impossibile nel campo dei numeri reali, tale operazione risulta possibile soltanto introducendo i numeri immaginari, per cui risulta essere $\sqrt{-1} = i$, ma in questo contesto un valore temporale immaginario non avrebbe alcun significato. Tuttavia, a livello esclusivamente teorico, ammettendo i numeri immaginari come soluzioni valide, si è arrivati ad ipotizzare i tachioni (dal greco *takhýs*, veloce) particelle che viaggiano esclusivamente a velocità maggiori di *c* e caratterizzati da proprietà (come la massa) immaginarie.

4 Lo dimostrano per esempio gli acceleratori di particelle, che per far muove particelle a velocità *prossime* a quella della luce, consumano moltissima energia. Queste considerazioni sono altresì legate ad un'altra conclusione della relatività che analizzeremo in seguito: l'aumento di massa.

5 Si può calcolare il limite di γ per v che tende a *c*:
$$\gamma = \lim_{v \to c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \infty$$

elettrico, abbia un raggio d'azione[1] infinito: "viaggiando" alla velocità della luce per lui il tempo non scorre e risulta di conseguenze avere vita infinita.

Tornando nel mondo reale noi tutti abbiamo quotidianamente a che fare con la relatività e il fenomeno della dilatazione temporale: il sistema di posizionamento globale o meglio conosciuto come GPS (Global Position System) offre un esempio. Tale sistema sfrutta la costanza della velocità della luce: molto semplicemente i ventiquattro satelliti che orbitano attorno alla Terra adibiti a questo scopo misurano il tempo necessario a un'onda elettromagnetica per viaggiare da un satellite a un ricevitore; conoscendo la velocità della luce e mettendo assieme l'informazione di due o più satelliti è possibile determinare le coordinate geografiche del ricevitore. Tuttavia la precisione richiesta deve essere migliore di 10^{-13}, per questo sui satelliti vengono usati orologi atomici dalla massima precisione.

Proviamo a determinare l'eventuale errore dovuto agli effetti relativistici, considerando che i satelliti hanno velocità di 4000 m/s.

$$E = \frac{\Delta t - \Delta t_0}{\Delta t} = \gamma - 1 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \left(1 - \frac{(4000 m/s)^2}{(2{,}99 \cdot 10^8 m/s)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 = 8{,}90 \cdot 10^{-11}$$

Come si vede l'errore è di gran lunga maggiore della precisione richiesta. Per fare un esempio, moltiplicando il risultato per i secondi medi di un giorno si ottiene un errore di circa 7 microsecondi al giorno[2]. Per questo motivo se non si tenesse conto della dilatazione temporale si causerebbe un notevole errore sul posizionamento del ricevitore, falsandone le coordinate geografiche.

Un'altra prova della dilatazione temporale sta nello spiegare i numerosi muoni cosmici che ogni secondo cadono sulla superficie terrestre. I muoni, indicati con la lettera greca μ, sono delle particelle elementari simili agli elettroni, con carica elettrica negativa, ma duecento volte più pesanti. A differenza degli elettroni, tuttavia, sono instabili e hanno una vita media di 2,2 μs; dopo di che decadono in altre particelle elementari. Essi sono prodotti dall'interazione dei raggi cosmici con l'atmosfera terrestre. I raggi cosmici sono un insieme di particelle cariche, principalmente protoni e nuclei d'elio e, in misura minore, elettroni, fotoni e neutrini, che provengono dallo spazio e colpiscono la superficie terrestre in qualsiasi direzione; interagendo con l'atmosfera si producono pioni, anch'esse particelle subatomiche, che decadono in muoni e neutrini muonici. I muoni vengono prodotti ad un altitudine di circa diecimila - ottomila metri ma un rilevatore orizzontale posto al livello del mare rileva, in media, un muone al minuto per unità di superficie (1 cm^2). Questo risultato potrebbe apparire impossibile, considerando pure che viaggino alla velocità della luce, la massima distanza che percorrerebbero è $s = v\Delta t = 3 \cdot 10^{8} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6} = 660$ m, ben al disotto della distanza che dovrebbero percorrere. Dobbiamo ricorrere, dunque, alla dilatazione temporale. Ammettendo una velocità media di $0{,}998c$ gli effetti re-

1 Il raggio d'azione di una particella o di una forza (che può essere determinata dalla particella stessa) si può pensare come la massima distanza alla quale essa ha influenza. L'interazione elettromagnetica permette di non farci sprofondare fra gli atomi di un pavimento, come ci permette di osservare tutte le radiazioni provenienti dagli angoli più remoti dell'universo.

2 $E = 8{,}90 \cdot 10^{-11} \cdot 86400$ s $= 7{,}69 \; 10^{-6}$ s

lativisti saranno molto più evidenti che nell'esempio precedente. Considerando un osservatore rigidamente collegato al muone, inizialmente in quiete, i due eventi[1] avvengono nello stesso punto spaziale e l'intervallo di tempo sarà $\Delta t_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}\ s$; secondo un osservatore a Terra, in quiete rispetto ai muoni, i due eventi sono, invece, interposti da una distanza s, per determinare l'intervallo di tempo utilizziamo la relazione $\Delta t' = \gamma\ \Delta t_0$; da cui si ricava:

$$\Delta t' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \Delta t_0 = \left(1 - \frac{(0{,}998c)^2}{c^2}\right)^{-1/2} 2{,}2 \cdot 10^{-6} s = 3{,}48 \cdot 10^{-5} s$$

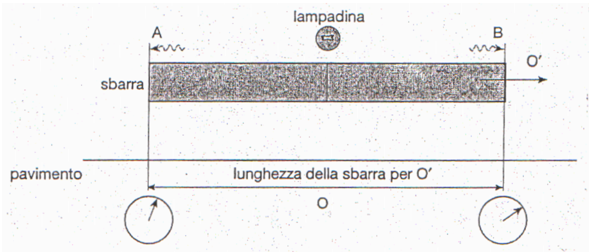
Lo spazio percorso in quest'intervallo di tempo rispetto a Terra, sarà quindi:

$$s = v\Delta t = 0{,}998c \cdot 3{,}48 \cdot 10^{-5} s = 10419\ \ m$$

Per il fatto dell'elevata velocità il tempo per il muone scorre più lentamente, avendo la possibilità di raggiungere la superficie terrestre.

Contrazione delle lunghezze

Analizziamo ora un'importante conseguenza della suddetta dilatazione temporale. Immaginavamo di voler determinare la lunghezza di una sbarra. Se inizialmente la sbarra è ferma rispetto all'osservatore basterà avvicinarle un «regolo campione» e ricavarne la lunghezza L_0 moltiplicando l'unità campione per il numero delle volte che essa è contenuta nella sbarra. Consideriamo ora che la sbarra si muova con velocità v rispetto all'asse x del nostro SC inerziale, costituito per esempio dal pavimento. Se vogliamo determinarne la lunghezza risulta difficile continuare ad utilizzare tale metodo, dobbiamo escogitarne uno più semplice. Immaginiamo, dunque, una lampadina posta al centro della sbarra. Considerando l'SC O' rigidamente collegato alla sbarra, un osservatore interno dirà che i due raggi giungeranno ai due estremi della sbarra simultaneamente[2], esprimerà, di conseguenza, la lunghezza $L_0 = 2c\Delta t'$. Per un osservatore esterno, tuttavia, per quanto abbiamo detto fino ad ora, non si può parlare di simultaneità e l'evento dell'arrivo del raggio luminoso nell'estremo posto in direzione del moto sarà ritardato rispetto all'altro evento. Di conseguenza l'osservatore esterno esprimerà la lunghezza $L = c(\Delta t_1 + \Delta t_2) = 2c\Delta t'/\gamma$. Ricavando $\Delta t'$ dall'equazione precedente e risolvendo quest'ultima rispetto a L si ricava:



Gli eventi A e B (arrivi della luce agli estremi della sbarra) sono simultanei per l'osservatore O'.
L'evento B è ritardato rispetto all'evento A per l'osservatore O.

(2)

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

---

1 La formazione e il decadimento del muone.

2 In base al concetto di simultaneità, definito sopra, due orologi sincronizzati agli estremi della sbarra, essendo in quiete rispetto ad essa, misureranno lo stesso intervallo di tempo.

L_0 esprime la lunghezza misurata dall'osservatore solidale con la sbarra mentre L la lunghezza misurata da un osservatore in quiete rispetto alla sbarra, la quale si muove con velocità v. Si osserva che per qualsiasi velocità minore di *c,* γ è sempre maggiore di 1, di conseguenza la lunghezza della sbarra, rispetto ad un osservatore in moto, è vista più corta di quanto la vede un osservatore solidale con essa.

La (2) esprime la contrazione delle lunghezze: la lunghezza di un oggetto appare più corta, lungo la direzione del moto, ad un osservatore che non è in quiete rispetto all'oggetto. Anche in questo caso se $v \to c$, $\gamma \to \infty$, di conseguenza $L \to 0$[1]: se un oggetto potesse viaggiare alla velocità della luce, non avrebbe lunghezza! Ancora possiamo dire che se $v > c$, come per quanto riguarda il tempo, γ assumerebbe valore immaginario, e dunque anche la lunghezza sarebbe immaginaria. Come si vede risulta matematicamente impossibile che un oggetto possa viaggiare più veloce della luce.

«In tutto ciò non v'è nulla di misterioso, né di paradossale. Nella fisica classica è stato sempre supposto che gli orologi conservino lo stesso ritmo e i regoli la stessa lunghezza, sia che si trovino in moto, sia che si trovino a riposo. Bisogna rinunciare a questa supposizione se la velocità della luce deve essere la stessa in tutti gli SC e se la teoria della relatività deve essere valevole. Non è facile disfarci di pregiudizi profondamente radicati, ma non c'è altra via d'uscita. [...] *Perché ritenere, com'è stato fatto in passato, che il tempo sia assoluto e scorra in egual modo per tutti gli osservatori, in tutti gli SC? Perché ritenere che la distanza debba essere invariabile?* [...] *Dobbiamo accettare il concetto del tempo relativo in ogni SC, perché questa è la via migliore per uscire dalle difficoltà»*[2].

A questo punto Einstein si concentrò sulla cinematica, la parte della fisica che studia il moto dei corpi, in particolare, per esempio, la quantità di moto, l'energia meccanica e tutta una serie di considerazioni legate al moto. In questo senso cerca comunque sia, come detto all'inizio del paragrafo introduttivo della relatività ristretta, di mettere in relazione la meccanica newtoniana, l'elettromagnetismo e i postulati della relatività, giungendo a formulare la cinematica relativistica, ossia lo studio e il comportamento di oggetti, particelle e onde elettromagnetiche, quando si trovano a velocità prossime o uguali[3] a quelle della luce. Principalmente sono dimostrazioni che traggono origine da sviluppi complessi e conseguenze matematiche delle leggi sopra enunciate, applicate al moto dei corpi. Mi limiterò, in questo senso, ad enunciare solo alcune di questi sviluppi, i più importanti e i più rivoluzionari, limitando il più possibile le dimostrazioni matematiche, che risulterebbero alquanto complesse.

Conservazione della massa, o dell'energia?

Prima del 1905 i più importanti principi di conservazione riguardavano l'energia e la massa, separatamente. Il primo fu formulato dalla meccanica newtoniana con la legge della conserva-

---

1 Anche in questo caso si può calcolare L come limite per v che tende a *c*: $L = \lim_{v \to c} L_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = 0$

2 Albert Einstein e Infeld Leopold, L'evoluzione della fisica, p. 177

3 Ovviamente il termine di uguaglianza, come vedremo fra poco, vale solo ed esclusivamente per le onde elettromagnetiche, compresa la luce.

zione dell'energia meccanica: in un sistema isolato la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale deve essere nulla. In seguito con la scoperta del moto bronwoniano e la conseguente interpretazione meccanica dei fenomeni termici, e con la nascita, dunque, della termodinamica, esso si porta al di fuori dei fenomeni prettamente meccanici e diventa il primo principio della termodinamica e in seguito divenne, con l'aiuto di Michael Faraday (1791 – 1867), con la scoperta dell'induzione elettromagnetica, nella sua forma più generale, il principio di conservazione dell'energia: in sistema chiuso ogni possibile forma di energia si conserva nel tempo. Il secondo fu formulato da Antoine-Laurent de Lavoisier (Parigi, 1743 – 1794): in un sistema chimico isolato la massa dei reagenti è identica alla massa dei prodotti, o usando le parole di Lavoisier: «Nulla si crea, nulla si distrugge, tutto si trasforma». In seguito venne poi esteso nella sua forma più generale in tutte le discipline scientifiche e divenne la legge di conservazione della massa. Entrambi questi principi si radicarono nelle menti dei più grandi scienziati divenendo di estrema importanza nella storia della fisica e fondamentali nella costante spiegazione e organizzazione dell'universo. Due erano le cose che si conservavano: l'energia e la massa, senza che l'una avesse a che fare con l'altra. Ben presto, tuttavia, ci si accorse che qualcosa non tornava.

Consideriamo il seguente passo, tratto da *L'evoluzione della fisica*, di Albert Einstein e Infeld Leopold:

«Immaginiamo un corpo di massa determinata, in moto rettilineo e sollecitato da una forza esterna che abbia la stessa direzione del moto [...]. *La meccanica insegna che la forza è proporzionale alla variazione della velocità o accelerazione. In altri termini: in un secondo, la velocità di un dato corpo può indifferentemente passare da 100 a 100 e 1 metri al secondo, o da 280 000 chilometri a 280 000 chilometri e 1 metro al secondo. E ciò perché la forza occorrente per produrre entro uno stesso intervallo di tempo la stessa accelerazione di un dato corpo è supposta essere sempre la stessa, qualunque ne sia la velocità. Questa supposizione è forse ammissibile anche dal punto di vista della teoria della relatività? Decisamente no! La legge suddetta è valevole soltanto per piccole velocità* [...]. *La nuova legge è assai diversa dall'antica: occorrono forze estremamente grandi per accrescere la velocità, allorché questa è molto grande. Non è affatto la stessa cosa accrescere di 1 metro al secondo una velocità di 100 metri al secondo o una velocità prossima a quella della luce. Quanto più una velocità si avvicina a quella della luce e tanto più è difficile accrescerla. Allorché una velocità eguaglia quella della luce è impossibile accrescerla ulteriormente* [...]. *La velocità della luce è infatti il limite massimo per tutte le velocità. Una velocità maggiore non può venir prodotta da nessuna forza finita»*[1].

Per far accelerare un corpo dotato di massa, dunque, è necessaria una forza tanto maggiore quanto maggiore è la velocità del corpo, e la forza risulta infinita, qualora lo volessimo far viaggiare alla velocità della luce. Come prosegue lo stesso Einstein, proviamo ad interpretare tali considerazioni secondo la meccanica classica. Essa dice che un corpo a riposo è dotato di una massa determinata, la massa a riposo. Se vogliamo mettere in moto tale corpo, o innalzarne la velocità, esso, in virtù della proprietà di avere massa, opporrà una certa resistenza, tanto maggiore quanto maggiore è la sua massa. Da quanto visto prima, la teoria della relatività dice qualcosa di più. La resistenza che il corpo oppone non dipende soltanto dalla massa del corpo stesso, ma anche dalla sua velocità. In particolare tanto maggiore è la massa e la velocità, tanto

1 Albert Einstein e Infeld Leopold, L'evoluzione della fisica, p. 184

maggiore è la resistenza del corpo. E diventa infinitamente grande quando la velocità diventa quella della luce. La resistenza che un corpo oppone al moto può essere anche interpretata come l'energia necessaria per farlo muore. Per far muove un corpo è necessaria una forza esterna, per esempio qualcuno che ci dia una spinta, ovvero, è necessario fornire energia al sistema e compiere un lavoro, la quale verrà utilizzata per mettere in movimento il corpo stesso, ossia, accrescerne l'energia cinetica, che inizialmente era nulla. In vista delle suddette considerazioni sarà necessario a parità di massa, fornire una maggiore quantità di energia per accrescere la velocità di un corpo, qualora esso si muova già molto velocemente, che per far muovere lo stesso corpo inizialmente in quiete. Deriva che l'energia di un corpo in movimento sarà tanto maggiore quanto maggiore è la sua massa e la sua velocità.

Quanto vale, dunque, l'energia di un corpo in movimento? La teoria della relatività risponde con una relazione molto particolare e di notevolmente portata rivoluzionaria a confronto con la teoria classica. Einstein giunge alla conclusione seguente:

(1)
$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Prima di analizzare l'equazione consideriamo un altro esperimento: «Immaginiamo una scatola contenete delle sferette, l'una e le altre a riposo. Per mettere la scatola in moto o per aumentarne la velocità occorre una data forza. Potrà questa forza accrescerne la velocità nella stessa misura e nello stesso intervallo di tempo anche qualora le sferette nell'interno della scatola si muovessero in tutti sensi, come le molecole di un gas, ma con velocità media prossima a quella della luce? Occorrerà indubbiamente una forza maggiore in ragione dell'accresciuta energia cinetica delle sferette e della conseguente maggior resistenza che la scatola opporrà al moto. *L'energia o quanto meno l'energia cinetica resiste al moto, come le masse ponderabili.* Ma ciò è forse vero per tutte le specie o forme di energia? A questa domanda la teoria della relatività dà una risposta chiara e netta, ricavata dai suoi presupposti fondamentali. *L'energia sotto tutte le sue forme si comporta come la materia*»[1].

Questo è uno dei più straordinari risultati della teoria della relatività ristretta: l'equivalenza tra massa ed energia. Non è l'energia o la massa che si conserva, bensì, la massa-energia! Entrambi diventano una cosa sola, «l'energia possiede massa e la massa rappresenta energia»[2].

«*Per secoli, energia e massa sono sembrate due entità completamene distinte, che evolvevano senza influenzarsi a vicenda: l'energia era concepita in termini di cavalli vapore o di chilowattora; la massa era misurata in libre piuttosto che in chilogrammi o tonnellate. Nessuno si era mai sognato di mettere in relazione tali unità. Nessuno aveva intravisto la possibilità di un trasferimento ‹naturale› tra energia e massa,* [...] *nessuno a parte Einstein, naturalmente* [...]. *Il lavoro dello scienziato influì radicalmente sulle due visioni che gli studiosi del XIX secolo avevano in materia di leggi di conservazione. L'energia non si conserva, tanto meno la massa, ma questo non significa che a regnare sovrano sia il caos. Infatti esiste un'unita più profonda, perché c'è un legame tra ciò che*

1 Ibidem, p. 187

2 Albert Einstein e Infeld Leopold, L'evoluzione della fisica, p. 187

accade nel dominio delle energie e quanto si vede in quello delle masse [...]. *Lavoisier e Faraday*[1] *avevano svelato la verità solo in parte. L'energia non è indipendente, e nemmeno la massa, ma la somma di massa ed energia rimarrò sempre costante»*[2].

Colgo subito l'occasione per mettere in evidenza un aspetto fondamentale dell'equazione (1): se $v = 0$, ossia se il corpo è fermo, si ricava la seguente relazione:

(2)
$$E_0 = mc^2$$

Dove E_0 rappresenta l'*energia a riposo di un corpo dotato di massa*. Ebbene sì, un corpo che sta fermo possiede energia! Newton avrebbe certamente deriso questa affermazione, ma ora tutto è visto da un'ottica differente. Tale risultato costituisce una tappa fondamentale nel processo di unificazione della scienza: questa relazione riconduce a unità i due distinti principi di conservazioni.

A questo a punto possiamo analizzare l'equazione (1) con maggior chiarezza. Tale relazione esprime, quindi, l'energia totale di un corpo in movimento: la somma della sua energia a riposo E_0, dovuta alla massa, e dell'energia cinetica K, dovuta alla velocità. L'energia a riposo rappresenta proprio l'equivalente della massa del corpo espresso in termini di energia. Come per il resto delle equazioni si evidenzia che se $v > c$, γ sarebbe immaginario, di conseguenza sarebbe matematicamente impossibile che un qualsiasi oggetto o particella superi la velocità della luce, così come la luce stessa. Allo stesso modo, se $v \rightarrow c$, l'energia $E \rightarrow \infty$. Ovvero, occorrerebbe una quantità di energia infinita per far viaggiare un corpo alla velocità della luce. In ragione della convertibilità dell'energia in massa, si usa spesso dire che quando $v \rightarrow c$, la massa del corpo tenderebbe ad infinito, oppure che il corpo si vedrebbe "ingrossare". Queste proposizioni, anche se possono rendere pienamente l'idea della portata di queste considerazioni, onde evitare equivoci, necessitano di maggiori chiarimenti. È necessario, anzitutto, fare una distinzione tra il concetto di materia e di massa, anche se molto spesso essi potrebbero apparire la stessa cosa. «Gli astronauti si accorgono di pesare meno sulla Luna che sulla Terra, ma questo non perché una parte di loro si sia dissolta o sia sparita»[3]. Queste poche e semplici parole aiutano a chiarire il concetto. La differenza è minima, ma in questo contesto essa è essenziale. Il concetto della conservazione di Lavoisier era, principalmente, legato alla materia. In sostanza egli aveva scoperto che tanti *atomi* o *molecole* si mettevano a reagire, tanti se ne dovevano trovare alla fine. Utilizzando le parole di David Bodanis: «Il merito di Lavoisier fu di concentrarsi sulla conservazione della materia, il che aumentò l'interesse per la conservazione della massa, sebbene con le conoscenze attuali sia risaputo che non c'è ragione per cui massa e materia debbano essere sempre collegate. Negli ultimi anni del Settecento nessuno si curava del fatto che quanto si stava dimostrando fosse la conservazione degli atomi, perché a quel tempo nessuno sospettava

1 Antoine-Laurent de Lavoisier (Parigi, 1743 – 1794) è stato un chimico francese, ed enunciò la prima legge della conservazione della massa; Michael Faraday (1791 – 1867) è stato un fisico britannico, che diede un importante aiuto nella formulazione della conservazione dell'energia (con la scoperta dell'induzione elettromagnetica).

2 David Bodanis, E = MC², p. 58

3 David Bodanis, E = MC², Nota 1, cap. IV

l'esistenza di entità fisica come gli atomi»[1] . Quanto per l'astronauta, riguarda ovviamente anche per l'oggetto che si sta avvicinando alla velocità della luce: «osservando un [oggetto] abbastanza veloce si nota che la sua massa aumenta smisuratamente, ciò non accade perché compaiono dal nulla degli atomi all'interno della struttura [...], e nemmeno perché quelli presenti diventano più grassottelli»[2]. Queste considerazioni sono legate al concetto di massa. Come abbiamo visto un qualsiasi oggetto oppone resistenza ad una qualsivoglia variazione di velocità o accelerazione. La massa si definisce proprio come «la proprietà di un corpo di opporre resistenza a una qualsiasi accelerazione»[3] . Teniamo presente che la massa così intesa è la "costante" di proporzionalità newtoniana tra la forza e l'accelerazione; tuttavia, da quanto abbiamo detto prima si è scoperto che la forza per far accelerare un corpo, a parità di accelerazione, aumenta con la velocità del corpo. Di conseguenza, se l'accelerazione rimane costante, la massa deve necessariamente aumentare con la velocità. Che equivale a dire, per la convertibilità delle massa in energia e viceversa, che l'energia di un corpo deve necessariamente aumentare con la velocità. Anche se le due proposizioni diventano equivalenti, l'ultima risulta essere più corretta.

Queste considerazioni potrebbero sembrare da film di fantascienza. «Per quanto possa sembrare assurdo, l'evidenza lo conferma. Se iniziate ad accelerare dei minuscoli protoni, dotati di un *unità* di massa quando si trovano a riposo, dapprima essi si muoveranno più rapidamente, assecondando le vostre aspettative. Ma quando saranno in prossimità della velocità della luce, un osservatore si accorgerà realmente del cambiamento in atto in essi. È un evento di riscontro quotidiano degli acceleratori di particelle»[4] come il CERN[5]. «Si è tentati di pensare che ciò è un cavillo, e che sebbene noi possiamo fare confusione nei calcoli, un oggetto non sarà *davvero* più massivo di quanto indichino le cifre. Ma i magneti che circondano l'acceleratore anulare del CERN devono *davvero* essere alimentati con maggiore potenza per mantenere la traiettoria di un protone che si muove a quelle velocità, perché altrimenti [...] l'aumento della massa lo spedirà contro le pareti dell'acceleratore. Al 90% della velocità della luce, la potenza che occorre per controllare una massa 2,5 volte più grande deve essere assolutamente immensa per evitare l'uscita della traiettoria e la conseguente collisione. Se si passa a 99,9997% di *c* [...] l'aumento di massa è pari a 430 volta il valore iniziale»[6].

Quanto appena vista si può esprimere anche come massa relativistica. Come si è visto tale concetto non è di facile interpretazione. Einstein stesso rimase con numerosi dubbi al riguardo. In particolare, l'aumento di massa può comunque sia essere visto come l'energia extra che viene fornita al corpo e che non riesce a convertirsi in moto, ma bensì in massa.

Da queste considerazione, si può capire il motivo per cui un qualsiasi oggetto *dotato di massa* non possa raggiungere la velocità della luce. In un modo o nell'altro sarebbe impossibile. Tuttavia, qualche pagina prima ho accennato ai fotoni. Il fotone, molto semplicemente, è una parti-

---

1 David Bodanis, E = MC², Nota 1, cap. IV

2 Ibidem.

3 Ibidem, Nota 11, cap. V

4 David Bodanis, E = MC², p. 57

5 European Organization for Nuclear Researh.

6 Ibidem, Nota 11, cap. V

cella dotata di massa a riposo nulla, che è stata introdotta da Einstein e da Planck per la descrizione di particolari fenomeni derivati dalla luce, come il fenomeno fotoelettrico[1]. Sostanzialmente il fotone è la luce; ossia, la luce è composta da tantissime di queste particelle, ciascuna delle quali ha un'energia determinata e indivisibile, ovvero sono particelle quantizzate. Ma se il fotone compone la luce, e la luce viaggia alla velocità della luce, anche il fotone deve viaggiare alla velocità della luce. Potrebbe certamente sorgere un dubbio. Ricordo però che il fotone ha massa a riposo nulla. Ecco perché può viaggiare alla velocità della luce.

Al giorno d'oggi l'equazione $E_0 = mc^2$ è forse l'aspetto più conosciuto della relatività, senza tuttavia comprenderne appieno le implicazioni e le conseguenze. Dietro la banalità di poche lettere e simboli si nasconde un significato che va al di là dell'esperienza comune. Comprenderne appieno il significato e le implicazioni non è semplice come non lo è stato neanche per Einstein stesso. Famoso il suo aforisma: «La bomba atomica... Se solo l'avessi saputo avrei fatto l'orologiaio». Forse oggi la bomba atomica o i disastri nucleari sono le conseguenza che erroneamente vengono maggiormente attribuiti alla formula e al lavoro di Einstein. Probabilmente, anche se l'avesse saputo, aveva una così grande stima per il genere umano e per l'umanità, da non credere, forse, che un giorno o l'altro, ne avrebbe fatto uso. Comunque sia era così complicato e difficile trovarne il significato e le implicazione che passarono ben 40 anni prima della sua prima, drammatica, applicazione; e la guerra deve aver certamente accelerato i tempi. Questo perché l'energia che l'equazione dice di sprigionare non è semplice da ottenere. Oggi si sa, attraverso le esperienze di Marie Curie[2], di Fermi[3], di Rutherford[4] e di tutti gli altri ricercatori, che tale energia è contenuta nei nuclei atomici degli elementi, e alcuni elementi, come l'uranio o il plutonio, ma tutti gli elementi radioattivi, in genere, in determinate condizioni, con determinate reazioni, sono più propensi a liberarne solo una piccolissima parte[5] piuttosto che altri. «Mettendo una massa di mezzo chilogrammo nella casella della *m* [...] l'equazione assicura che, in teoria, si possono ottenere oltre dieci miliardi di chilowattora di energia, pari all'energia prodotta da una centrale elettrica di grandi dimensioni. È in virtù di questo principio che una piccola bomba atomica, il cui nucleo può stare nel palmo di una mano, risulta in grado di sprigionare energia sufficiente a [...] ridurre in polvere interi isolati di edifici in muratura. [...] Una bomba all'uranio produce il suo effetto se meno dell'1 % della massa che contiene si trasforma in energia. Una quantità maggiore di materia, concentrata all'interno di una stella»[6] riscalda i pianeti per miliardi di anni. Come si vede la formula è diventa di estrema importanza nella fisica nucleare, ha permesso la spiegazione di una moltitudine di fenomeni prima oscuri. Il Sole, come tutte le stelle presenti nell'universo, si basano su reazioni di fusione nucleare, basate su

---

1 Fenomeno che consiste nell'emissione di elettroni da superfici metalliche colpite da onde elettromagnetiche. Da questo effetto deriva l'effetto fotovoltaico, ossia la produzione di energia elettrica a partire dalla luce. I pannelli fotovoltaici ne sono un esempio.

La scoperta della radioattività e assieme a Rutherford della fissione nucleare.

3 La scoperta dei cosiddetti «neutroni lenti» che, all'insaputa di Fermi, diedero il via al processo di scissione nucleare.

4 Considerato il padre della fisica nucleare.

5 La bomba all'uranio sviluppata dagli americana conteneva 64,13 Kg di uranio, appena l'1,5 %, ossia circa 900 grammi, subì la fissione, e ancora meno, si trasformò in energia.

6 David Bodanis, $E = MC^2$, pp. 80 - 81

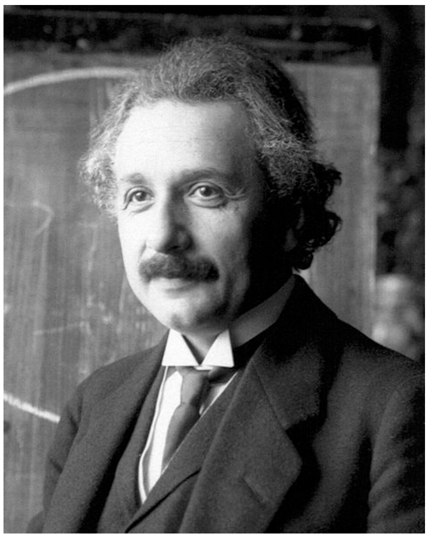
questa formula; i moderni sistemi di datazione radiologica, probabilmente non sarebbero esistiti senza l'equazione. Negli ospedali la formula viene continuamente utilizzata: nella PET, tomografia a emissione di positroni, ovvero il sistema per lo scanning degli organi interni, nei trattamenti radioterapici e in tantissime altre applicazioni di uso quasi comune. La conoscono perfettamente gli scienziati e gli ingegneri che lavorano negli acceleratori di particelle, senza considerare gli effetti relativistici e gli effetti dovuti a questa formula, forse sarebbe stato quasi impossibile costruirne uno; come, del resto, dare una spiegazione razionale ai numerosi fenomeni che vi si producono.

Come abbiamo visto sono molteplici le paradossali conseguenze cui giunge la relatività speciale, anche se possono sembrare assurdità incomprensibile, si ricorda che si trattano di deduzioni matematiche, molte delle quali di fatto realizzate. Vedendo un treno in moto a velocità relativisticamente apprezzabili, un osservatore esterno vedrà la desincronizzazione degli orologi e la dilatazione temporale: egli vedrà rallentati tutti i moti che si verificano nel treno; vedrà la contrazione delle lunghezze nel senso del moto, e gli oggetti all'interno gli appariranno più corti del normale; vedrà l'aumento di massa dei corpi e gli oggetti all'interno gli appariranno più pesanti. Parimenti in virtù del relativismo del moto, le medesime conclusioni saranno constatate dai passeggeri del treno.

Relatività Generale

Qualora potessimo applicare le leggi della natura a qualsiasi SC, il conflitto così violento, agli esordi della scienza, fra il punto di vista di Tolomeo e quello di Copernico non avrebbe più senso. Potremmo adottare l'uno o l'altro a uguale diritto. Le due proposizioni: il sole è immobile e la terra gira, e il sole gira e la Terra è immobile avrebbero semplicemente il significato di due convenzioni diverse concernente due SC diversi

Albert Einstein



Un problema ancora aperto è dare una definizione rigorosa di un sistema di riferimento inerziale. Tutta la teoria descritta fin qui ne fa un uso abbondante: tutti i postulati, le considerazioni, le leggi, i risultati e le conseguenze sono da riferirsi solo ed esclusivamente in un SC inerziale. Ma che cosa è un SC inerziale? Espongo, al fine di comprendere la difficoltà nel dare risposta a tale domanda, un estratto da *L'evoluzione della fisica*, in cui vi è presente una sorta di intervista immaginaria ad un ipotetico fisico classico, nella speranza che possa darne una definizione:

– Che cos'è un sistema inerziale?

– È un SC nel quale le leggi della meccanica sono valide. In tale SC un corpo sul quale non agisce nessuna forza esterna si muove uniformemente. Questa proprietà ci mette in grado di distinguere un sistema inerziale da ogni altro.

– Ma che cosa si deve intendere quando dite che nessuna forza agisce su un corpo?

– Ciò vuol dire semplicemente che il corpo si muove uniformemente in un SC inerziale. [...]

– Ma che cos'è, in concreto, il vostro SC inerziale? Quale stato di movimento gli va attribuito?

– È semplicemente una finzione utile, ma non ho nessuna idea come essa possa realizzarsi. Se con il mio SC potessi allontanarmi sufficientemente da tutti i corpi materiali, e liberarmi così da tutte le influenze esterne, allora soltanto il mio SC sarebbe veramente inerziale.

– Ma che cosa si intende per un SC libero da tutte le influenze esterne?

– È Precisamente un SC inerziale.

Ci troviamo dunque di nuovo davanti alla nostra prima domanda.

Senza darci per vinti, tuttavia, proviamo ad adottare la prospettiva del fisico classico. Immaginiamo un corpo in moto uniforme nel vuoto e molto distante da qualsiasi altra massa, tanto distante, da non subire alcuna perturbazione derivata da qualsiasi campo gravitazione; il che equivarrebbe ad affermare che nel nostro ipotetico universo vi sia un solo corpo. Il corpo costituisce il nostro SC. Come ci dice la meccanica classica, questo corpo non è influenzato da nessuna forza esterna, ossia si muove di moto uniforme. Quindi il nostro SC è inerziale. Ma come è possibile stabilirne il moto, se non possiamo metterlo in relazione a nessun altro corpo? «È lecito forse considerare il moto di un solo corpo nell'intero universo? Per moto di un corpo intendiamo sempre il suo mutamento di posizione rispetto a un altro corpo»[1]. Inoltre, in ragione dell'impossibilità di determinare lo stato di moto di un SC inerziale, quindi della non sensatezza nell'affermare se esso sia a riposo o in movimento, ci dice che il moto assoluto non esiste! Ricadremmo di conseguenza nella stessa situazione precedente, in cui dovevamo ammettere la necessità di un sistema di riferimento privilegiato, a cui riferirci.

Invero ci siamo proprio ricaduti. Tralasciando le contraddizioni legate ai SC inerziali, ammettendo che le leggi, le teorie e gli effetti considerati e messi in evidenza fino ad ora, siano da riferirsi solo ed esclusivamente ai SC inerziali, ne pregiudica un certo grado di privilegio.

Perché dunque i fatti osservati non debbano essere gli stessi in qualsiasi sistema di riferimento in un moto qualunque? È lecito supporre questa affermazione? «Anche se è necessario per descrivere la natura impiegare un sistema di coordinate scelto a nostro piacere la scelta del suo movimento non doveva, almeno, subire limitazioni di sorta; le leggi dovevano essere assolutamente indipendenti da questa scelta»[2].

Onde evitare ciò, e per risolvere l'insanabile circolo vizioso degli SC inerziali, si vede, come sia necessario costruire una nuova teoria della relatività che sia in grado di estendere il principio di relatività. Se ricordate, il nostro percorso è cominciato con *in ogni sistema di riferimento inerziale le leggi della meccanica sono invariante*, poi siamo giunti a *in ogni sistema di riferimento inerziale ogni legge della natura deve essere invariante* ed in infine arriviamo ad un principio realmente relativistico: *in ogni sistema di riferimento tutte le leggi della natura devono restare invariante.*

«La possibilità di superare le difficoltà in questione dipende dunque dalla risposta al quesito seguente: possiamo formulare le leggi delle fisica in modo che esse siano valide per tutti gli SC indistintamente, [ossia], [...] anche per quelli in moto arbitrario? [...] Siamo in grado di costrui-

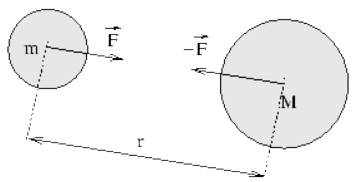
1 Ibidem, p. 199

2 Albert Einstein, Come io vedo il mondo, p. 77

re una fisica realmente relativistica, valida in tutti gli SC, una fisica cioè nella quale non via sia più posto per il moto assoluto ma soltanto per il moto relativo? Si, è fattibile! [...] Nel corso dello sviluppo scientifico sorgono in ogni momento nuovi ostacoli che impongono alla teoria carattere sempre più astratto. Ci attendono ancora avventure impreviste. Ma il nostro scopo finale resta pur sempre quello di una migliore compressione della realtà. [...] Più le nostre supposizioni diventano semplice e fondamentali e più gli ingranaggi matematici del nostro ragionamento si complicano. [...] Quanto più semplice è la nostra immagine del mondo esterno e tanto maggiore è la dovizia dei fatti che essa abbraccia e tanto più perfetto è il riflesso dell'armonia universale che essa induce nel nostro spirito»[1]. Ciò si propone la relatività generalizzata, pubblicata nel 1916 da Albert Einstein.

Gravitazione di Newton

Dimenticandoci momentaneamente degli SC inerziali e della relatività generale, si deve fare un appunto fondamentale: dobbiamo parlare di gravitazione. A quel tempo l'unica teoria della gravitazione era la famosa teoria della gravitazione di Newton. Questa teoria è l'esempio più eclatante di filosofia meccanicistica in fisica e da cui essa trae origine: tutte le forze presenti in natura si dovevano spiegare unicamente mediante proprietà intrinseche dei corpi, come la massa o la carica elettrica, che agissero unicamente in relazione alla distanza e nella direzione della congiungente dei corpi. Consideriamo un esempio dalla teoria di gravitazione per chiarire le idee. Immaginiamo un corpo A dotato di massa m, un corpo B dotato di massa $M > m$, e il raggio r che separa i due corpi. Il corpo B attrarrà il corpo A con una forza inversamente proporzionale al raggio e direttamente proporzionale alla massa; analogamente, il corpo A attrarrà B con una forza inversamente proporzionale al raggio e direttamente proporzionale alla massa. In termini matematici la teoria di gravitazione universale, che esprime la forza agente fra due corpi dotati di massa, è espressa da Newton mediante la seguente equazione:



$$F = G\frac{m_a\, m_b}{r^2}$$

Dove F è la forza di attrazione gravitazionale, G è la costante di gravitazione universale, m_a e m_b le masse dei due corpi ed r la distanza che li separa. Come si vede essa è molto semplice ed è grazie alla quale che Newton poté formulare il primo modello cosmologico su basi scientifiche. Tuttavia, nonostante la sua semplicità, presenta alcuni problemi di fondo. Una particolarità data da Newton a questa forza è la sua istantaneità. «Immaginiamo che il Sole per qualche motivo all'improvviso scompaia. Privata della forza che la mantiene nella sua orbita, la Terra (secondo Newton) inizierebbe immediatamente a muoversi lungo una linea retta. Tuttavia, il Sole in realtà sparirebbe alla vista degli abitanti della Terra solo circa otto minuti più tardi, poiché questo è il tempo impiegato dalla luce per coprire la distanza tra il Sole e la Terra. In altre parole, il cambiamento di moto della Terra precederebbe la scomparsa del Sole»[2] e quindi sa-

1 Ibidem, pp. 201 - 202

2 Mario Livio, Dio è un matematico, p. 290

rebbe istantaneo. Come si vede questa considerazione cozza, irrimediabilmente, con la relatività ristretta: nessun oggetto o particella o onda di qualsiasi natura che sia può superare la velocità della luce, l'istantaneità non esiste!

Riguardo ai problemi legati alla gravitazione e alla sua causa lo stesso Newton ammise nei *Principia*, «Fin qui ho spiegato i fenomeni del cielo mediate la forza di gravità, ma non ho mai fissato la causa della gravità. Questa forza nasce internamente da qualche causa, che penetra fino al centro del Sole e dei pianeti [...] e la sua azione si estende per ogni dove a immense distanze. [...] In verità non sono mai riuscito a dedurre dai fenomeni la ragione di questa proprietà della gravità, e non invento ipotesi»[1].

Non soltanto gli SC inerziali, dunque, ci portano ad una contraddizione logica da dover risolvere, ma nuovamente, l'antica teoria si scontra con la nuova. Anche se momentaneamente le cose non sembrano correlate, come vedremo in seguito, esse lo sono più di quanto si possa pensare; quindi, risolvere questi problemi di fondo, significa allargare le prospettive e far rientrare un numero sempre maggiore di fenomeni in un unica teoria, capace di spiegarli con il minor numero di postulati possibili. Ciò vuol dire che la teoria della gravitazione di Newton, come la relatività ristretta applicata ai soli SC inerziali, sono soltanto dei casi limite, o particolari, della nuova teoria; come lo era la relatività galileiana rispetto alla relatività ristretta.

Equivalenza delle masse

Una premessa fondamentale, prima ancora di addentrarci nella relatività generale, è l'equivalenza delle massa inerziale e della massa gravitazionale. «In meccanica, il rapporto fra le masse di due corpi viene definito in due modi che differiscono fra loro in maniera fondamentale: in primo luogo, come il rapporto inverso tra le accelerazioni che la medesima forza motrice impartisce loro (masse inerziali), in secondo luogo come il rapporto tra le forze che agiscono su di esse nello stesso campo gravitazionale (masse gravitazionali)»[2]. La massa inerziale, come dice la seconda legge della dinamica, è definita come la costante di proporzionalità fra la forza che deve essere applicata ad un corpo e l'accelerazione che ne deriva. Al contrario, la massa gravitazionale, deriva dall'interazione di un corpo con un campo gravitazione. Tutte le volte che determiniamo il "peso" di un oggetto mediante la bilancia, non potremmo farlo se non esistesse la forza gravitazionale, che attira il corpo verso il centro della Terra. Immaginiamo di determinare la massa di un corpo servendoci di entrambi i ragionamenti. «La risposta data dall'esperimento è chiarissima. I risultati sono esattamente gli stessi!»[3]. Questo porta ad una conclusione che non avremmo mai potuto prevedere: l'equivalenza delle masse inerziali e delle masse gravitazionali. «L'uguaglianza di queste due masse, pur definite in modo così diverso, è un fatto confermato da esperienze di grandissima accuratezza ma la meccanica classica non riesce a darne alcuna giustificazione»[4]. Notiamo che nella meccanica classica questa conclusione è del tutto accidentale e non ne fornisce alcuna spiegazione. Mentre nella fisica moderna essa è «fonda-

1 Tratto da *I Principia*, Newton

2 Albert Einstein, Il significato della relatività, p. 62

3 Albert Einstein e Infeld Leopold, L'evoluzione della fisica, p. 44

4 Albert Einstein, Il significato della relatività, p. 62

mentale e costituisce un nuovo ed essenziale indizio conducente a una più profonda comprensione»[1].

Da queste considerazioni deriva un importate conseguenza, essenziale per la relatività generale. Oggi sappiamo perfettamente la non dipendenza del tempo impiegato dai corpi in caduta libera per arrivare al suolo con la massa di quest'ultimi. Famoso il video dell'astronauta David Randolph Scott dell'Apollo 15 in cui lasciò cadere un martello e una piuma constatandone l'arrivo al suolo nel medesimo istante[2]. Questo porta alla conclusone che un campo gravitazionale attrae un corpo con una forza proporzionale alla massa, ma con la medesima accelerazione. Ne deriva che l'*accelerazione di un corpo in un campo gravitazionale è indipendente dal corpo stesso*.

«Il pensiero più felice della mia vita»

Mediante queste considerazioni di lì a poco Einstein pervenne ad un'intuizione formidabile, quella che egli definì «il pensiero più felice della mia vita»: *un uomo che cade dal tetto di una casa non sente il proprio peso*.

Consideriamo alcuni importantissimi esperimenti ideali.

«Immaginiamo un immenso ascensore, all'ultimo piano di un grattacielo molto, ma molto più alto di quelli che esistono realmente. Di colpo si spezza il cavo che sostiene la cabina e questa comincia a cadere liberamente. Degli osservatori che si trovano nel suo inferno effettuino durante la caduta alcuni esperimenti. [...] *Uno degli osservatori lascia cadere un fazzoletto e un orologio. Che cosa accadrà a questi due corpi? Per un osservatore all'esterno, che guarda attraverso la finestra della cabina, fazzoletto e orologio cadono entrambi esattamente allo stesso modo, con la stessa accelerazione. Rammentiamo che l'accelerazione di un corpo in caduta* [in virtù di quanto affermato più sopra] *è del tutto indipendente dalla sua massa.* [...] *Tale equivalenza, che si riflette nel fatto che i corpi in caduta hanno tutti la stessa accelerazione, è essenziale e serve di base a tutta la nostra argomentazione.* [Tornando al fazzoletto e all'orologio, per un osservatore esterno, entrambi cadono allo stesso modo.] *Ma altrettanto avviene con la cabina. Pertanto la distanza fra i due corpi e il pavimento non varierà. Per l'osservatore interno entrambi i corpi resteranno esattamente allo stesso posto che occupavano quando li lasciò liberi. Egli infatti può ignorare il campo gravitazionale, perché la causa di questo risiede al di fuori del suo SC. Egli constata che,* [nel suo SC], *nessuna forza agisce sui due corpi, i quali restano in riposo come se si trovassero in un SC inerziale.* [...] *Se l'osservatore dà una spinta a un corpo in una direzione* [...] *il corpo continuerà a muoversi uniformemente fin quando urterà»*[3] le pareti della cabina. In breve, come si può vedere, per l'osservatore interno le leggi della meccanica classica sono valide e i corpi si comportano confermando il principio di inerzia, di conseguenza, l'*SC rigidamente collegato all'ascensore in caduta libera, è un SC inerziale*. Esso differisce in un solo punto dall'SC inerziale della meccanica classica: la sua validità nel tempo e nello spazio. Il nostro SC è infatti inerziale limitatamente all'ascensore, entro i suoi confini spaziali, in quanto il corpo all'interno presto o tardi urterà con-

---

1 Albert Einstein e Infeld Leopold, L'evoluzione della fisica, p. 44

2 Ovviamente questa non è la conseguenza della differenza del campo gravitazionale, ma del fatto che sulla Luna non vi è aria, per cui i corpi che cadono non hanno nessun attrito. È famoso anche l'esperimento del tubo a vuoto di Newton: facendo il vuoto in un tubo con dentro vari oggetti, per esempio una piuma e un sasso, essi cadono con la stessa velocità.

3 Albert Einstein e Infeld Leopold, L'evoluzione della fisica, pp. 203 - 204

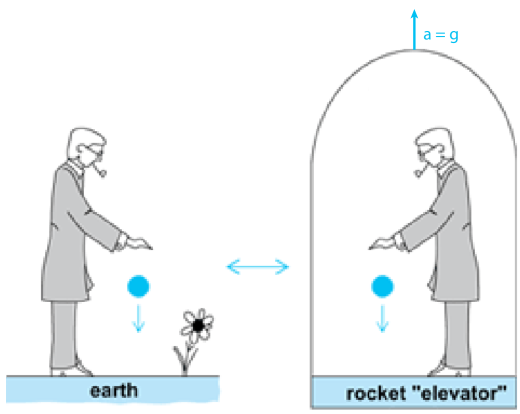
tro una parete, distruggendone il moto uniforme; e nel tempo, in quanto prima o poi, l'ascensore toccherà il suolo. Altresì queste limitazioni sono essenziali. Le dimensioni dell'SC devono infatti essere tali che tutti i corpi all'interno dell'SC, compreso l'SC, presentino la stessa accelerazione. Possiamo dire, quindi, che un SC in un moto di caduta libera è, *localmente, limitato nel tempo e nello spazio*, un SC inerziale, in cui tutte le leggi della fisica sono valide. Il che equivale a dire che è sempre possibile stabilire, in una determinata zona dello spazio-tempo, un opportuno sistema di riferimento in modo da eliminare l'effetto della forza gravitazionale.

Per ottenere queste conclusioni, tuttavia, il campo gravitazionale e l'equivalenza delle masse, sono considerazioni essenziali e giustificano quanto si osserva dall'interno e dall'esterno. Gli osservatori interni infatti non hanno la minima percezione del moto dell'ascensore, essa può essere in moto uniforme come in riposo: al loro interno i corpi soddisfano la leggi d'inerzia, l'SC è inerziale e nessuno potrebbe dubitare di ciò. Tuttavia, dall'esterno, l'ascensore, come tutti i corpi presenti all'interno, sono soggetti al campo gravitazionale e accelerano uniformemente verso il suolo. In un dibattito entrambi gli osservatori avrebbero perfettamente ragione nell'affermare le due conclusioni. Malgrado ciò, entrambi gli osservatori avrebbero comunque a disposizione un SC valido in cui riferire le proprie descrizioni che risulterebbero ugualmente coerenti. «Una descrizione coerente dei fenomeni fisici, in due SC diversi è [quindi] possibile anche se questi non si trovano in moto uniforme l'uno relativamente all'altro»[1].

Principio di equivalenza

Consideriamo, ora, un altro imparante esperimento, alquanto differente:

«*Assumiamo un SC nel quale valga la legge dell'inerzia* [...]. *Immaginiamo un ascensore* [nel nostro SC] *tirato con una forza costante verso l'alto. Dato che nel nostro SC le leggi della meccanica sono valide, l'ascensore si muoverà con un'accelerazione costante nella direzione del moto. Sentiamo ora le spiegazioni che l'osservatore esterno e quello interno danno dei fenomeni.*



Osservatore esterno *Il mio SC è inerziale. Vedo l'ascensore muoversi con accelerazione costante, causa la forza costante che agisce su di esso. Le persone nell'interno si trovano in moto* [accelerato]. *Per loro le leggi della meccanica non valgono. Per loro non è vero che i corpi sui quali non si esercita nessuna forza si trovano a riposo. Un corpo lasciato cadere dentro la cabina urta presto il pavimento* [...].

Osservatore interno *Non vedo nessuna ragione per ritenere che il mio ascensore sia in moto* [accelerato] [...]. *Il mio orologio, il mio fazzoletto e tutti gli altri corpi cadono perché l'ascensore si trova in un campo gravitazionale. Riscontro esattamente lo stesso genere di movimenti che l'uomo nota sulla Terra*»[2].

---

1 Ibidem, p. 205

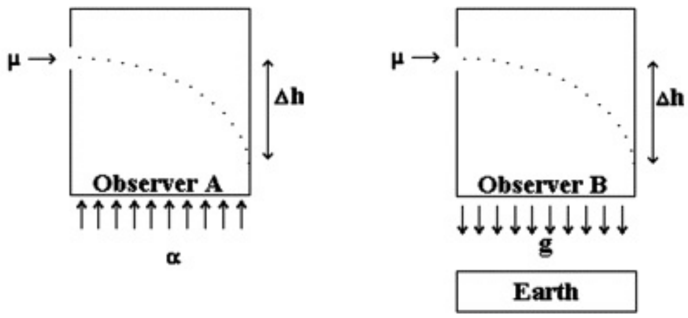
2 Ibidem, pp. 206 - 207

Questo esperimento risulta essere di estrema importanza. L'osservatore interno, dato che l'ascensore si muove con accelerazione costante nella direzione del moto, subirà l'effetto di una forza *apparente*[1], e di conseguenza di un'accelerazione costante, in direzione contraria al moto. Ossia verso il basso. Se noi siamo chiusi in una stanza nel quale gli oggetti cadono verso il basso, come potremmo spiegarlo, se non ammettendo che siamo perfettamente immobili e sulla Terra? Ciò è una affermazione vera. Ma è altrettanto vero, se non avessimo concetti precostituiti, ammettere che la stanza si muova di moto uniformemente accelerato. Esso esprime l'*equivalenza tra un campo gravitazionale e un SC in moto uniformemente accelerato*. È sempre possibile stabilire, quindi, un sistema di riferimento in modo da simulare un campo gravitazionale.

Riassumendo, i suddetti esperimenti mettono in evidenza come sia impossibile decidere quale delle due ipotesi sia vere: «Entrambe le descrizioni, sono del tutto logiche, e non c'è modo di decidere quale di esse sia vere. Possiamo indifferentemente ammettere l'una o l'altra come spiegazione dei fenomeni»[2]. Ciò, assieme all'equivalenza delle masse, esprime il principio di equivalenza: *in un campo gravitazionale qualsiasi, è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento rispetto al quale è altrettanto possibile scegliere un intorno finito di tale sistema nel quale gli effetti dell'accelerazione dovuti al campo gravitazionale sono nulli; analogamente, in un sistema di riferimento è sempre possibile scegliere un intorno di tale sistema in modo da simulare l'effetto di un campo gravitazionale*.

Questi ragionamenti stanno alla base della relatività generale e permisero di estendere il principio di relatività a tutti i sistemi di riferimento: infatti, dagli esperimenti, si evidenzia che ciò che accade in un sistema di riferimento inerziale avviene, in modo indistinguibile, anche in sistema in moto di caduta libera in un campo gravitazionale, quindi in un SC non inerziale[3]; e allo stesso modo, ciò che accade in un sistema inerziale in presenza di un campo gravitazionale è identico a ciò che avviene in un sistema uniformemente accelerato. Tutto ciò portò Einstein, come detto, al principio di relatività generalizzato: *ogni legge della natura deve avere la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento*.

La luce si incurva!



Un fatto molto importante deriva da queste considerazioni. Immaginiamo che un raggio luminoso possa entrare da un'apertura laterale del nostro ascensore. Cosa accadrà alla traiettoria del raggio? Consideriamo l'ascensore nel suo moto uniformemente accelerato verso l'alto: «il raggio luminoso penetra orizzontalmente e si muove in linea retta, con velocità costante, verso la parete opposta. Ma la cabina è in moto verso l'alto e cambia di posizione mentre il raggio si muove verso la parate. Pertanto il raggio colpirà un punto che non è esattamente opposto al punto d'entrata, [...] cosicché la propaga-

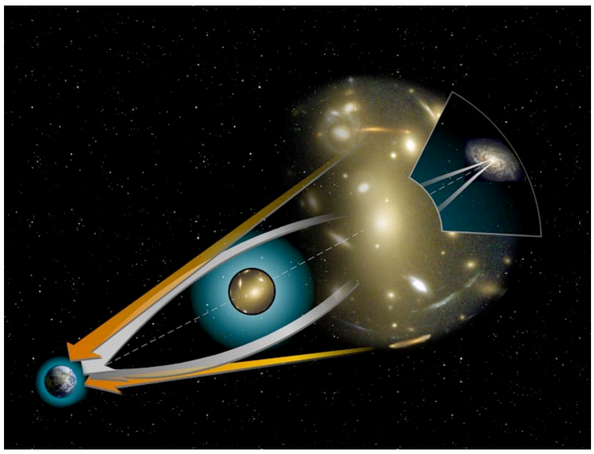
1 È utile capire che si tratta di una forza apparente, in quanto inseguito è essenziale.

2 Albert Einstein e Infeld Leopold, L'evoluzione della fisica, p. 207

3 Considerando il punto di vista di un osservatore esterno.

zione della luce relativamente all'ascensore non sarà rettilinea, bensì curva»[1] . Proviamo a prendere in considerazione il punto si vista interno. L'osservatore interno, come detto, crederà di essere in presenza di un campo gravitazionale. Come deriva dalla legge di Newton la forza gravitazionale agisce solo ai corpi dotati di massa. Anche il campo gravitazionale, dunque, incurva la luce? Ovviamente si! Per quanto detto sino ad ora un campo gravitazionale si comporta allo stesso modo di un SC in moto uniformemente accelerato e viceversa, per cui non c'è ragione per non considerare valida tale affermazione. Inoltre, non dobbiamo dimenticarci che «un raggio luminoso trasporta energia e questa possiede massa. E ogni massa inerte subisce l'attrazione del campo gravitazionale. *Un raggio di luce si incurverà in un campo gravitazionale alla stessa stregua di un corpo lanciato orizzontalmente con velocità uguale a quella della luce*»[2].

Questa è una conclusione sicuramente inaspettata che la gravitazione classica non era in grado di prevedere ne è in grado di darne sufficienti motivazioni. «Einstein capì che si sarebbe potuti arrivare a una prova, a una dimostrazione così chiara e convincente da non lasciare dubbi circa l'esattezza degli assurdi risultati cui era pervenuto»[3]. Ovviamente l'esempio mostrato in figura è un'esagerazione; in realtà la curvatura della luce, come di una qualsiasi onda elettromagnetica, è molto più piccola, e questa aumenta con l'aumentare dell'intensità del campo gravitazionale. Il campo gravitazionale terrestre, tuttavia, è troppo debole per produrvi esperimenti in grado di dare dei risultati validi; è necessario un campo gravitazionale molto più forte. Il Sole, per esempio, ha una massa circa 330 000 volte più grande di quella della Terra, produrrà certamente un campo gravitazionale molto più forte. E cosa succede dunque a un raggio che passa molto vicino al Sole? Certamente si incurverà! «Di norma non potremmo notare questa luce curvata dal Sole, perché il fenomeno varrebbe solo per la luce stellare, che passa molto vicino al bordo del Sole. In circostanze normali la luce solare bloccherebbe questi raggi stellari di giorno. Ma durante un'eclisse?»[4]. A pochi anni dalla conclusione del lavoro di Einstein, il 29 maggio 1919, fu prevista un eclissi totale con un particolare molto importante: il Sole si trovava di fronte ad un gruppo di stelle molto luminose, la costellazione delle Iadi. Fu così che, con un implicita spinta anche da parte di Einstein, oltre che di tutta la comunità scientifica dell'epoca, l'équipe di ricerche guidata da Arthur Eddington, un astrofisico inglese, si recò su un isola al largo della costa africana per scattare alcune lastre fotografiche dove si sarebbe dovuto misurare l'arco di curvatura della luce proveniente dalle stelle dietro al Sole. «Quando giunsero le lastre, venne realizzato uno speciale micrometro che vi si adattasse; una volta che Eddington ebbe misurato e rimisurato, i telegrammi di congratulazioni cominciarono a fioccare [...]. La teoria di Einstein era stata completa-



---

1 Albert Einstein e Infeld Leopold, L'evoluzione della fisica, p. 208

2 Ibidem, p. 209

3 David Bodanis, E = MC², p. 203

4 Ibidem, p. 203

mente confermata. Lo spostamento era di 1",72 e quello osservato era stato di 1",75 ± 0,06»[1]. Oggi tale fenomeno viene generalmente chiamato lente gravitazionale. Ovviamente, come mostra in figura, l'effetto si ha anche a seguito dell'enorme campo gravitazionale prodotto da una galassia o anche di un buco nero. I raggi vengono incurvati da un gruppo massivo, e sulla Terra arrivano solo le posizioni apparenti di ciò che è dietro all'insieme di corpi celesti.

Questi fenomeni furono di notevole importanza e portarono a delle conclusione alquanto stravolgenti, capaci di mettere in crisi un intero sistema di pensiero perdurato dall'epoca di Newton. Era necessario, infatti, dare delle spiegazioni e delle motivazioni valide, che si adattassero a quanto già si era scoperto.

Da quanto ho esposto si può certamente capire che la gravitazione gioca un ruolo importantissimo: i risultati degli esperimenti condotti fino ad ora, infatti, non fanno altro che ricondurci al problema della gravitazione; ed è altrettanto evidente che la soluzione del problema non possa essere quello adottato da Newton. Si vede, dunque, come *la relatività generale sia una teoria delle gravitazione*: per poter dimostrare il postulato della relatività generale è necessario risolvere il problema della gravitazione. Si prefigura in questo senso quanto già era accaduto nel 1905 con la relatività ristretta atta ad inglobare la fisica classica surrogandola a caso limite, ossia nel caso in cui le velocità siano molto minore della velocità della luce. Così accade anche con la relatività generale, al cui interno, oltre che la relatività ristretta come caso limite in cui le leggi siano applicate ai soli SC inerziali, si trova anche la gravitazione di Newton.

Spazio–tempo curvo

«L'esempio di cui stiamo per servirci è ancora più fantastico di quello dell'ascensore in caduta libera»[2]; e le conclusioni ancora più paradossali.

Immaginiamo un sistema di riferimento K costituito, per esempio, da una giostra. Considereremo la circonferenza massima, costituita dal bordo della giostra, e un'altra circonferenza con raggio molto più piccolo e con lo stesso centro. Nell'istante iniziale la giostra sarà ferma, quindi K è inerziale. Sia un osservatore che, mediante un regolo campione in quiete, per esempio un righello, inizi a misurarne il raggio la lunghezza. La geometria euclidea ci dice che il rapporto fra la misura della circonferenza e il suo diametro è costante, e precisamente vale π. L'osservatore, dunque, concluderà che i due rapporti sono eguali fra di loro e uguali a π. Immaginiamo ora il nostro SC K', sempre la giostra, che inizi a girare su stessa di moto circolare con velocità angolare costante. In ragione dell'accelerazione centrifuga il nostro K' non è più inerziale, ma questo non è più importante, in quanto il nostro proposito

1 Ibidem, p. 209

2 Albert Einstein e Infeld Leopold, L'evoluzione della fisica, p. 211

è quello di trovare leggi fisiche valide in entrambi gli SC. Consideriamo un osservatore esterno che ripeterà le misurazioni con i medesimi regoli rispetto a K'. Per quanto riguarda la circonferenza minima, considerandola sufficientemente piccola, la velocità tangenziale sarà notevolmente inferiore rispetto alla circonferenza massima, dunque «possiamo applicare con tutta sicurezza le leggi della meccanica classica e ignorare la relatività speciale. Ciò significa che il regolo possiede la stessa lunghezza e il risultato delle misurazioni sarà lo stesso per entrambi»[1]. Per quanto riguarda la misura del raggio essa verrà effettuata nel medesimo modo per entrambe le circonferenze, possiamo dire che «collocato sul raggio, il regolo si trova in moto rispetto all'osservatore esterno. Tuttavia il regolo non subisce contrazione e possiede la stessa lunghezza per entrambi gli osservatori, dato che la direzione del moto è perpendicolare al raggio. [Quindi anche in questo caso il rapporto del raggio e della circonferenza minima sarà pari a π. La stessa cosa varrà per la misura del raggio della circonferenza massima.] Pertanto tre misure, quelle dei due raggi e della circonferenza piccola, sono le stesse per entrambi gli osservatori»[2]. Lo è forse anche la quarta? Come per la circonferenza più piccola, nella circonferenza massima, la direzione del moto è coincidente con la direzione del regolo, ma in questo caso la velocità tangenziale sarà notevolmente superiore. In accordo con la relatività ristretta, rispetto all'osservatore esterno, il regolo apparirà più corto; di conseguenza la lunghezza della circonferenza massima misurata rispetto a K' sarà diversa per i due osservatori e precisamente più lunga. Così che i due rapporti delle due circonferenze non risultano uguali fra di loro; e quello della circonferenza massima risulta maggiore di π. «Le leggi della configurazione di corpi rigidi rispetto a K' non risultano quindi in accordo con le leggi della configurazione dei corpi rigidi formulate in termini di geometria euclidea [rispetto a K]. Inoltre se si dispongono due orologi simili (che ruotano assieme a K'), uno sulla circonferenza e l'altro nel centro del cerchio, osservandoli da K si vedrà l'orologio sulla circonferenza avanzare più lentamente di quello al centro. [...] Lo spazio e il tempo non possono quindi essere definiti rispetto a K' come erano stati definiti nella teoria della relatività speciale rispetto ai sistemi inerziali»[3]. Per quanto si è detto negli esperimenti precedenti, inoltre, si può benissimo immaginare che il sistema K' non ruoti affatto. Un osservatore nato a cresciuto in quella giostra, senza possibilità di confrontarsi con l'esterno, direbbe che vi sia un campo gravitazionale, e che la giostra sia perfettamente immobile! Considerando un oggetto che si trovi al centro della giostra, a mano a mano che questa comincia a girare, esso verrà trascinato da una forza verso le pareti della giostra. La stessa forza che fa attaccare i panni attorno al cestello di una lavatrice durante una centrifuga. «Le forze centrifughe che intervengono, relative a questo sistema sono proporzionali alla massa dei corpi, esattamente come le forze di gravità. Non sarebbe possibile, in talune circostanze, concepire il sistema di coordinate come immobile e le forze centrifughe come forze di gravità?»[4].

1 Ibidem, p. 215

2 Ibidem, p. 215

3 Albert Einstein, Il significato della relatività, pp. 64 - 65

4 Albert Einstein, Come io vedo il mondo, pp. 77 - 78

Le massa incurvano lo spazio-tempo

Siamo giunti ancora una volta al campo gravitazionale: «Questa considerazione fatta incidentalmente ci fa presentire che una teoria della relatività generalizzata deve fornirci le leggi di gravitazione»[1]. Ma abbiamo appena scoperto qualcosa di più. «Campo gravitazionale, geometria non euclidea e orologi aventi ritmo diversi sono per me fatti intimamente connessi»[2]. *Negli SC non inerziali la geometria euclidea non è più valida!* «Le leggi secondo le quali i corpi solidi si dispongono nello spazio non concordano esattamente con le leggi spaziali della geometria euclidea. È ciò che si vuol dire quando si parla della *curvatura dello spazio*. I concetti fondamentali, la retta, il piano, ecc., perdono così, in fisica, il loro esatto significato. Nella teoria della relatività generalizzata, la dottrina dello spazio e del tempo, la cinematica, non è più un fondamento indipendente dal resto della fisica»[3]. Ma un SC non inerziale può venir considerato come un SC immobile in un campo gravitazionale, la conclusione finale è straordinaria: «*il campo gravitazionale influenza e persino determina le leggi metriche del continuo spazio-temporale*. Se le leggi della configurazione di un corpo rigido ideale devono essere espresse in maniera geometrica, allora in presenza di un campo gravitazionale la geometria è non euclidea»[4]. Ed infine dato che «*Il comportamento dei corpi e la marcia degli orologi dipendono dai campi gravitazionali, i quali a loro volta, sono prodotti dalla materia*»[5]. Ne consegue che *la massa determina lo spazio-tempo.*

Quest'ultima proposizione è sia l'estremo risultato che il punto di partenza della teoria della relatività generale. Fino a questo punto non si è fatto altro che preoccuparci dei presupposti e delle considerazioni necessarie al fine di giungere alla teoria della relatività. Come ho già detto più volte, infatti, la teoria della relatività si prefigura come fine ultimo quello di spiegare e formulare una nuova teoria della gravitazione, sistematica e coerente, che si adatti al nuovo principio di relatività e alle nuove scoperte. Tutti gli esperimenti e le considerazioni fatte sono state necessarie al fine di capire come il principio di relatività generalizzato possa essere preso in considerazione e in che modo sia possibile formulare una nuova teoria. Il risultato è sorprendente e inequivocabile. «*Il nostro mondo non è euclideo.* La natura geometrica del nostro mondo è determinata dalle masse e dalle loro velocità. *Le equazioni dell gravitazione*, rispondenti alla teoria della relatività generale, *tendono a mettere in luce le proprietà geometriche del nostro mondo*»[6]. Il punto di partenza, dunque, non sono più le forze o le distanze o un sistema di riferimento particolare, come invece lo erano per la gravitazione di Newton. In questo senso *muta completamente il punto di vista da cui guardare la gravitazione*. «Il problema della gravitazione è stato così ricondotto a un problema matematico: bisogna cercare le equazioni più semplici, immutabili riguardo a qualsiasi sistema di coordinate»[7]. Determinare la geometria dello spazio-tempo significa, dunque, giungere alla nuova teoria della gravitazione e scriverne le nuove leggi. Non è

---

1 Ibidem, p. 78

2 Albert Einstein e Infeld Leopold, L'evoluzione della fisica, p. 217

3 Ibidem, p. 78

4 Albert Einstein, Il significato della relatività, p. 65

5 Albert Einstein, Come io vedo il mondo, p. 78

6 Albert Einstein e Infeld Leopold, L'evoluzione della fisica, pp. 222 - 223

7 Albert Einstein, Come io vedo il mondo, p. 91

la forza di un corpo che ne attira un altro e viceversa che, come nel sistema solare, determina le varie orbite dei pianeti o la posizione di quest'ultimi, ma bensì lo spazio attorno a loro, che a sua volta viene determinato dalla distribuzione delle masse. «Il problema è che sembra assurdo! Come possono curvarsi lo spazio vuoto e il tempo?»[1] . Se quest'idea può sembrare assurda ai nostri tempi, figuratevi ai tempi di Einstein. È bene mettere in evidenza come a seguito di questi e di altri risultati, si generò una frattura nelle certezze della matematica e della fisica mai vista prima, una vera e propria crepa nel palazzo di cristallo. Per più di duemila anni la certezza che lo spazio fosse solo euclideo lo pose come fondamento della geometria e della matematica e conseguentemente nella descrizione fisica del cosmo. La sua negazione e la prova dell'esistenza di altre geometrie fu sconvolgente. Analizzerò in seguito nel dettaglio queste considerazioni, accennando solo al fatto che tuttavia non fu la teoria di Einstein a mettere in evidenza l'esistenza di una geometria diversa da quella euclidea, quanto, come ho già detto, fu in qualche modo una prova; bensì personaggi come Gauss, Lobačevskij, Riemann, Poincaré e molti altri matematici giunsero a formulare una geometria non euclidea sistematica e coerente molto prima della relatività ristretta, ma sino ad allora era rimasto solo teoria.

In realtà, dunque, la teoria della relatività fu in qualche modo una prova, la prima teoria che faceva ricorso e provava l'esistenza delle geometria non euclidee. Furono molte, poi, le spiegazioni che la nuova teoria riuscì a dare di fenomeni prima completamente oscuri. In questo senso, tuttavia, metteva, anche in fisica, in evidenza il problema che il mondo esterno poteva essere diverso da come lo si è sempre immaginato e spiegato, e in particolare il fatto che per quanto diversa possa essere la teoria e per quanto diversamente si spieghi la geometria di quello che ci sta attorno, il nostro punto di vista rimarrà sempre lo stesso: siamo osservatori interni! Non potremmo mai veramente scoprire come realmente è fatto il nostro spazio e il nostro mondo. «Per i pianeti circolanti intorno al Sole si constata che il sistema meccanico si addice perfettamente. Tuttavia potremmo immaginare un altro sistema basato su altre supposizioni e altrettanto confacente. I concetti fisici sono creazioni libere dell'intelletto umano e non vengono, come potrebbe credersi, determinati esclusivamente dal mondo esterno. Nello sforzo che facciamo per intendere il mondo rassomigliamo molto all'individuo che cerca di capire il meccanismo di un orologio chiuso. Egli vede il quadrante e le sfere in moto, ode il tic-tac, ma non ha modo di aprire la cassa. Se è ingegnoso, egli potrà farsi una qualche immagine del meccanismo che considera responsabile di tutto quanto osserva, ma non sarà mai certo che tale immagine sia la sola suscettibile di spiegare le sue osservazioni. Egli non sarà mai in grado di confrontare la sua immagine con il meccanismo reale e non potrà neanche rappresentarsi la possibilità e il significato di un simile confronto»[2]. Centinaia di anni di certezze, all'improvviso, si ritrovarono false, o quanto meno, non così esatte come le si credeva.

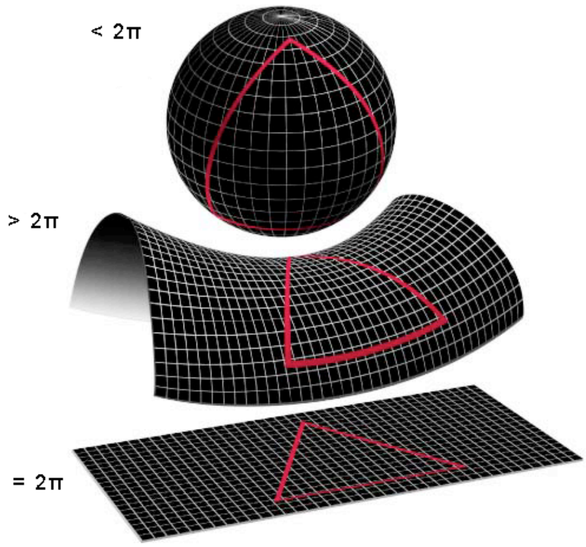
---

1 David Bodanis, $E = MC^2$, p. 203

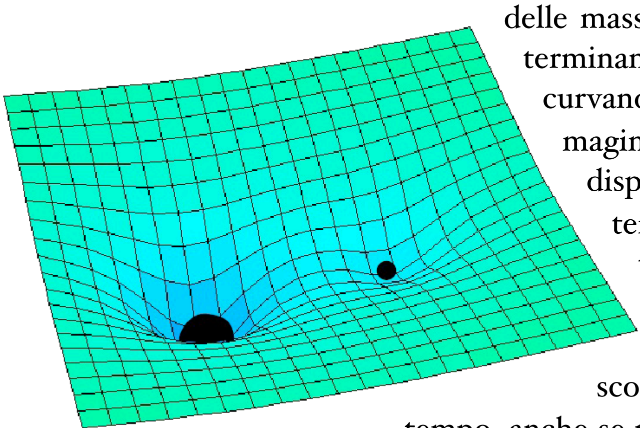
2 Albert Einstein, Come io vedo il mondo, pp. 41 - 42

Curvatura dello spazio-tempo

Tornando alla relatività cercherò, ora, di dare una definizione di curvatura dello spazio-tempo e cosa questo significhi. Le geometrie non euclidee, come meglio vedremo inseguito, sono di due tipi differenti: la geometria sferica, la terza in figura, e la geometria iperbolica, la seconda; mentre la prima rappresenta il normale spazio euclideo. Einstein giunse alla conclusione che lo spazio aveva la forma generale di una sella secondo il modello della geometria iperbolica.



Tuttavia sappiamo che le masse determinano lo spazio-tempo. Questo significa che lo spazio muta di forma e di curvatura a seconda della quantità di materia che è presente in un determinato intorno fisico, si dice che lo spazio ha una curvatura variabile. Quindi lo spazio non è tutto uguale, ne tutto curvo o ne tutto piano. Maggiore sarà la quantità di massa, maggiore sarà il campo gravitazionale e maggiore sarà dunque la curvatura dello spazio in quel determinato intorno. Al fine di comprendere meglio come funzioni tale meccanismo possiamo immaginarci lo spazio come un telo teso, che inizialmente rappresenta il nostro intorno fisico privo di masse, e quindi piatto. In seguito verranno disposte delle masse sul telo che di conseguenza si incurverà determinando una zona intorno alle masse che sprofonda, curvandosi, rispetto ai bordi. Potremmo, dunque, immaginarci il cosmo come un enorme telo su cui sono disposti i vari corpi celesti, ognuno dei quali determina la curvatura dello spazio-tempo nell'intorno fisico preso in considerazione.



Qualche pagina prima si è parlato di SC in moto di caduta libera. Rammentando si è scoperto che tale SC, limitato nello spazio e nel tempo, anche se per un osservatore esterno esso è in moto accelerato, per un osservatore interno esso è inerziale: nessuna forza agisce su di esso. A fronte delle nuove conoscenza possiamo tradurre tale considerazione in termini di spazio-tempo curvo. Essa esprime la possibilità che è sempre possibile trovare in intorno di spazio-tempo in cui è possibile annullare l'effetto di un campo gravitazionale. Il che equivale a dire che è sempre possibile trovare un intorno infinitamente piccolo di spazio-tempo in cui è valida la geometria euclidea. Attraverso queste considerazioni «Grossmann gli fece notare che la geometria non euclidea di Riemann era proprio lo strumento di cui aveva bisogno: una geometria di spazi curvi di un numero qualsiasi di dimensioni»[1]. La geometria non euclidea della relatività

1 Mario Livio, Dio è un matematico, p. 292, Un numero qualsiasi di dimensioni perché sappiamo che con la relatività ristretta il tempo si è aggiunto alle tre dimensioni spaziali, formando uno spazio a quattro dimensioni, di conseguenza sarà necessario una formulazione matematica di uno spazio curvo a quattro dimensioni.

generale è dunque simile ad un modello già da tempo sviluppato ad opera di Bernhard Riemann, un matematico e fisico tedesco. In termini matematici si dice che lo spazio-tempo ha un metrica di Riemann.

Ora che lo spazio-tempo è curvo il termine "linea", comunemente inteso, non ha più nessun significato fisico. Questo vuol dire che dati due punti nel nostro spazio non è più possibile determinarne la distanza utilizzando un semplice regolo campione, oppure i procedimenti noti utilizzati nella metrica euclidea, come il teorema di Pitagora. In termini semplici metrica indica proprio il metodo necessario per determinare la distanza fra due punti vicini. É evidente che nello spazio euclideo tale metrica è rappresentata dal teorema di Pitagora. Dire che «lo spazio ha una metrica di Riemann significa che nei dintorni infinitesimi di ogni punto P, la geometria euclidea è applicabile. Esiste di conseguenza nei dintorni di ogni punto P un sistema locale cartesiano di coordinate in rapporto al quale si calcola la metrica conformemente al teorema di Pitagora. [...] Questa struttura di spazio si trova, per così dire, compresa fra la struttura di Riemann e quella di Euclide»[1]. Questa è ovviamente una proposizione di partenza, in quanto lo scopo ultimo della relatività è quello di determinare la geometria, e di conseguenza la metrica, dello spazio-tempo. Siamo così costretti, per descrivere la metrica dello spazio-tempo in un punto qualunque, ad introdurre delle nuove e diverse funzione, a sua volta funzioni delle coordinate, che determinano la metrica dello spazio-tempo. In termini matematici tali funzioni vengono chiamate campo metrico o tensore metrico e appunto definiscono la metrica e la struttura di un particolare spazio non euclideo con un qualsiasi numero di dimensioni[2]. La cosa importante è che «la struttura dello spazio non è realmente determinata che quando queste funzioni siano affettivamente conosciute. In sè stessa la struttura di un tale spazio è completamente indeterminata, e non diventa determinata che allorquando si indicano queste funzioni»[3]. Questo lavoro impegnò Einstein e il suo amico Marcel Grossmann dal 1912 al 1914, ma nuovi problemi sorsero nel corso dello svolgimento, e il risultato non arrivò che nel 1916 con la formulazione della cosiddetta equazione di campo di Einstein, che permette di descrivere la struttura dello spazio-tempo, conoscendo la distribuzione delle masse.

Tornano ai fenomeni dello spazio-tempo curvo risulta evidente come sia assai più semplice immaginarci il moto dei pianeti o di un qualsiasi altro corpo che vaga per lo spazio, che non con la teoria della gravitazione di Newton. «Secondo Einstein, così come le palline da golf vengono guidate dalle ondulazioni del campo, i pianeti descrivono traiettorie curve nello spazio tempo deformato»[4]. Per comprendere quanto affermato si può sempre considerare il nostro telo con una palla al centro. Immaginando di porre una biglia sul telo e dandogli una leggera spinta, considerando assente il campo gravitazionale terrestre, essa inizierà a girare attorno alla pal-

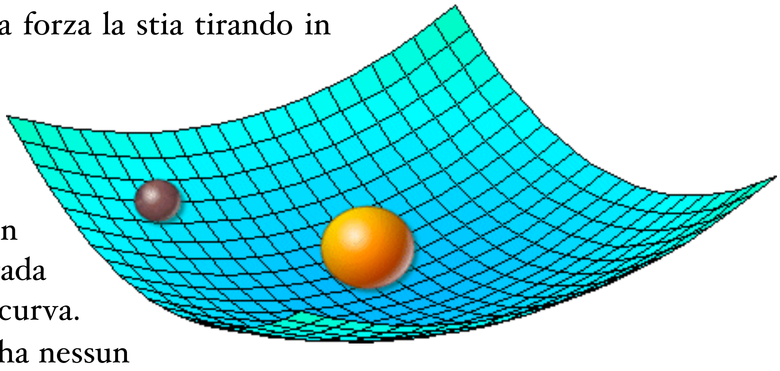
1 Albert Einstein, Come io vedo il mondo, pp. 92 - 93

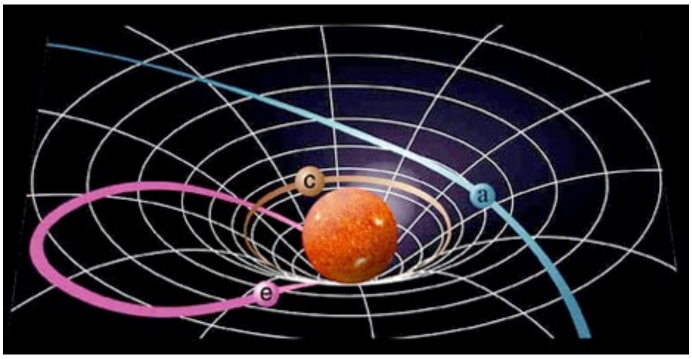
2 Si ricordi che la relatività ristretta ha introdotto lo spazio quadridimensionale per la descrizione degli eventi, e dunque anche lo spaio curvo della relatività generale sarà a quattro dimensioni. Si rammenta tre spazi e una temporale.

3 Ibidem, p. 91

4 Mario Livio, Dio è un matematico, p. 291

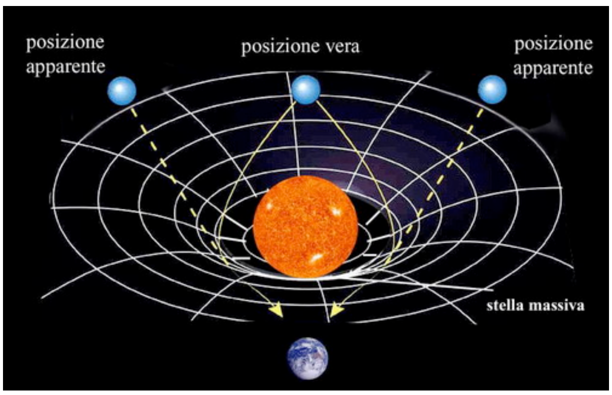
la senza fermarsi e senza che nessuna forza la stia tirando in una qualche direzione. Essa si muove per il semplice principio di inerzia: *non può far altro che seguire la sua strada, sempre dritta*! La stessa cosa accade quando si è in macchina: non possiamo fare altro che seguire la strada e curvare quando si presenta una curva. L'unica differenza è che la biglia non ha nessun ostacolo e quindi "sceglierà" la via più breve. In matematica e in fisica tale "via più corta" per percorrere un certo spazio viene chiamata geodetica, e rappresenta, appunto, una particolare curva che descrive la traiettoria più breve fra punti di un particolare intorno di spazio-tempo. Così è una geodetica l'orbita dei satelliti che ruotano attorno alla Terra, della Terra, della Luna e di tutti gli altri pianeti che ruotano attorno al Sole, come perfino di un raggio di luce, o di un qualsiasi altro oggetto che si muove nello spazio. Ogni cosa presente nello spazio, dalla più minuscola particella alla più gigantesca galassia, si muove procedendo sempre in avanti, seguendo una geodetica nello spazio-tempo e curvando quando si presenta una curva. A lato sono rappresentate delle geodetiche che rappresentano alcune delle possibili orbite attorno al Sole. I pianeti descrivono tale orbita semplicemente perché non possono fare altrimenti: non possono fare altro che seguire la strada, seguire lo spazio-tempo. *Le masse determinano lo spazio-tempo, e lo spazio-tempo dice alle masse come muoversi.*

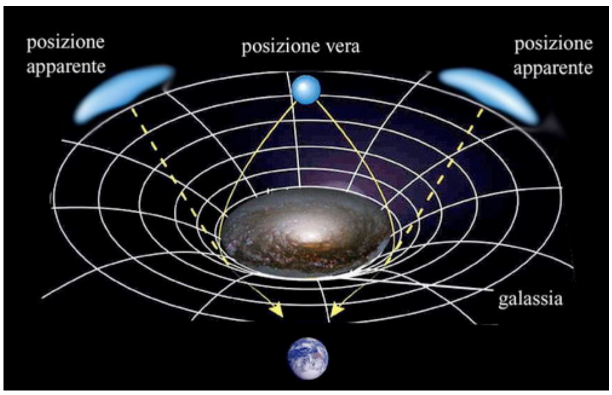




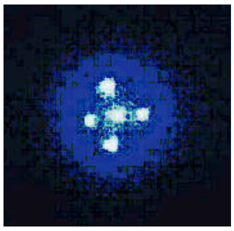
Fatti curiosi

Risulterà, ora, certamente più facile capire in che modo un raggio di luce possa curvarsi. Semplicemente perché esso non può far altro che andare dritto, e seguire la strada, ma siccome attorno ad un oggetto massivo lo spazio è curvo, incurverà anch'esso, seguendo la curvatura.





Nelle figure sopra è mostrato il fenomeno della lente gravitazionale: i raggi luminosi provenienti da un oggetto distante possono essere deviati dal campo gravitazionale prodotto da un oggetto massivo che si trova interposto lungo la linea di vista. Si formano così due o più immagini apparenti dell'oggetto distante che svelano perciò la sua esistenza. Nel primo caso, essendo la massa interposta sferica, come potrebbe essere il nostro Sole o una stella, si formeranno immagini puntiformi dell'oggetto distante, e il risultato è la cosiddetta croce di Einstein (immagine a destra). Nel secondo caso, invece, siccome l'oggetto interposto non ha una simmetria particolarmente definita e la curvatura dello spazio-tempo potrebbe non essere uguale in tutti i punti, come potrebbe essere per una galassia, si formeranno degli archi apparenti dell'oggetto distante. Tale fenomeno prende nome di anello di Einstein (immagine a sinistra), ed è grazie a questo fenomeno che è stato possibile scoprire numerosi oggetti molto distanti come i quasar o altre galassie.



Oltre a queste considerazioni la relatività generale è stata sottoposta a numerosi esperimenti con impressionante accuratezza. Ne è un esempio la spiegazione e la previsione esatta dell'eccessivo mutamento dell'orbita di Mercurio nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole, che fece acquistare alla relatività e ad Albert Einstein notevole notorietà all'interno del mondo scientifico. Questo fenomeno, ossia la rotazione dell'ellisse descritta da Mercurio rispetto al Sole «era conosciuto prima che la teoria della relatività generale venisse formulata, ma rimaneva inspiegabile», inoltre, la previsione non corrispondeva con quanto si osserva. Fu la relatività generale a far quadrare i conti tra la teoria e l'esperienza e a darne una spiegazione logica. La correzione riguardava il considerare la velocità del corpo in relazione a quella della luce e inoltre prendeva in considerazione l'estrema vicinanza del pianeta al Sole, che quindi risentiva maggiormente, rispetto agli altri pianeti, degli effetti prodotti dal campo gravitazionale del Sole.

Ulteriori conferme si hanno prendendo in esame i sistemi GSP. Precedentemente ho detto che il GPS fa uso di orologi atomici molto precisi. Dalla relatività ristretta si è scoperto, poi, per effetto della velocità dei satelliti, che gli orologi hanno un cammino più lento di quelli sulla Terra. Tuttavia i satelliti si trovano ad una certa distanza dalla Terra, e quindi, risentiranno meno del suo campo gravitazionale. Un orologio posto molto vicino ad un campo gravitazionale, come potrebbe essere un orologio posto sulla Terra, avrà un certo ritmo. Ora se questo orologio si allontanasse sempre di più si assisterà ad un aumento del suo ritmo. È chiaro che «gli orologi sui satelliti dovrebbero andare più veloci (di qualche decina di milionesimo di secondo al giorno) rispetto a quelli sulla Terra [...] Senza apportare le necessarie correzioni gli errori nelle posizioni globali potrebbero accumularsi a un ritmo di oltre otto chilometri al giorno»[1].

Queste sono soltanto alcune delle previsioni della relatività generale confermate dall'esperienza. «La nuova teoria della gravitazione s'allontana notevolmente, per quanto riguarda i principi, dalla teoria di Newton; ma i suoi risultati pratici concordano così da vicino con quelli di questa teoria che è difficile trovare sperimentalmente prove di differenze sensibili. [...] Il merito principale della teoria è che essa costituisce nel suo insieme un tutto logico»[2]. La teoria della relatività generale costituisce la più coerente applicazione dei principi della fisica del con-

1 Mario Livio, Dio è un matematico, p. 295

2 Albert Einstein, Come io vedo il mondo, pp. 78 - 79

tinuo, in cui *non trovano posto le azioni a distanza*, ma solo *ciò che avviene qui e ora, per causa di ciò che è avvenuto lì e un istante prima*. Essa porta ad una più profonda, pulita e logica comprensione del reale. Siamo finalmente riusciti a costruire una fisica realmente relativistica, in grado di potersi applicare a tutte le situazioni. Ma ad un prezzo assai importante. Essa ha portato il termine *relativismo* all'interno del sapere. Con la teoria della relatività si assiste, infatti, ad un mutamento e ad un rinnovamento delle prospettive conoscitive e finiva per affermare una diversa visione del mondo. Finiva l'epoca delle certezze assolute che avevano caratterizzato le scienze fisico-matematico sino al XIX secolo e che avevano proposto una comprensione razionale del reale basata su schemi oggettivi e su considerazioni univoche. Ora, il tempo come lo spazio o la massa, non sono più assoluti, essi cambiano a seconda dell'osservatore, non sono più definiti in maniera univoca e oggettivi, ma sono relativi al sistema di riferimento; si inserisce, dunque, una molteplicità di prospettive che introducono, nella variabilità dei punti di vista, un accentuato relativismo nella percezione del mondo.

A sostegno di quanto affermato ci addentreremo ora nel parallelo matematico, già accennato prima, di quanto è accaduto in fisica.

FINE DELLA VERITÀ EUCLIDEA

ANCHE LA MATEMATICA ENTRA IN CRISI

Lo shock del futuro: «lo stress e il disorientamento sconvolgenti che induciamo negli individui sottoponendoli a un cambiamento eccessivo in tempi eccessivamente brevi».

Alvin Toffler

Con la definizione data da Toffler del suo omonimo *Lo shock del futuro* si può esprimere la crisi in cui verteva la matematica alla fine del XIX secolo. «Di fatto una millenaria fede in una matematica in grado di offrire verità eterne e immutabili ne fu annientata»[1]. Per meglio capire ed apprezzare la portata di questo mutamento nella visione del mondo è necessario mettere in evidenza la situazione in esame.

«Fino all'inizio del XIX secolo, se c'era una branca della conoscenza che veniva considerata l'apoteosi della verità e della certezza, questa era la geometria euclidea»[2]. «Prodotto dello spirito squisitamente teoretico dei Greci, colonna portante di quell'assoluto platonico che doveva resistere alle mutevolezze del mondo sensibile»[3], per quasi due mila anni fu posta dai matematici e più ingenerale da tutti gli intellettuali, fisici e filosofi, a fondamento della realtà e della scienza stessa. C'era la ferma certezza che la geometria euclidea fosse la sola idealizzazione corretta del cosmo. Fondata interamente sull'evidenza e da una certa dose di intuizione, fu posta all'apice della certezza perfino dal filosofo David Hume (1771 - 1776), che, pur essendo uno tra i più illustri empiristi, era giunto ad una conclusione scettica, affermando l'impossibilità di costruire un sapere indiscutibile fondato sull'esperienza. A tal proposito scrive, infatti, nelle sue *Ricerche sull'intelletto umano e sui principi della morale*: «Anche se non esistessero in natura circoli o triangoli, le verità dimostrate da Euclide conserverebbero sempre la loro certezza ed evidenza»; per cui, pur affermando, come tutti gli empiristi, che ogni conoscenza doveva nascere esclusivamente dall'osservazione, «la geometria [euclidea] e le sue verità continuavano a godere di uno status privilegiato»[4].

Una condizione simile della geometria euclidea, venne riconosciuta anche dal filosofo tedesco Immanuel Kant (1724 - 1804), la cui filosofia è incentrata sulla funzione attiva dell'intelletto umano, il quale organizza ed elabora i dati dell'esperienza sensibile mediante le forme a priori dello spazio tempo e le categorie, che giustificano l'universalità e la necessità della conoscenza. È nella *Critica della ragion pura* che Kant, interrogandosi sulle modalità e sui limiti delle conoscenza umana, assegnò alla matematica un ruolo fondamentale, riconoscendo alla stessa la capacità di fornire conoscenze "oggettive". Tipici della matematica sono, infatti, i giudizi sintetici a priori, ossia quei giudizi che da un lato sono universali e necessari e dall'altro sono in grado di

1 Mario Livio, Dio è un matematico, p. 202

2 Ibidem, p. 203

3 Rocco Vittorio Macrì, Relativismo e pensiero debole: la perdita del fondamento, rivista Episteme, n.1, 2000

4 Mario Livio, Dio è un matematico, p. 204

dire qualcosa di nuovo sul mondo. Tali giudizi sono alla base sia della geometria sia dell'aritmetica, i due ambiti della matematica preposti rispettivamente all'organizzazione dei dati nello spazio e nel tempo. Tempo e spazio, secondo Kant, sono le cosiddette forme a priori che sussistono a prescindere dall'esperienza ma che prendono significato solo in rapporto ad essa, ossia, essi non derivano dall'esperienza, ma *sono le condizioni attraverso cui l'esperienza stessa è possibile.*

Da quanto detto risulta evidente che la geometria euclidea è a fondamento della nostra conoscenza del mondo esterno. «Kant riteneva che la geometria euclidea fornisse la sola via valida per elaborare e concettualizzare lo spazio, e che questa conoscenza intuitiva, universale, dello spazio fosse al cuore della nostra esperienza del mondo naturale»[1]. Per citare le sue parole, nella *Critica della ragion pura,* scrive: «Lo spazio non è un concetto empirico, proveniente da esperienze esterne [...]. Lo spazio è una rappresentazione a priori, necessaria, che sta a fondamento di tutte le intuizioni esterne [...]. Su tale necessità a priori si fonda la costruzione a priori di tutti i principi geometri, nonché la possibilità della loro costruzione a priori»[2].

Hume e Kant misero in evidenza due aspetti molto importati della geometria euclidea. «Il primo era l'asserzione del fatto che la geometria euclidea rappresenta l'unica descrizione accurata dello spazio fisico. Il secondo era l'identificazione della geometria euclidea con una struttura deduttiva solida, definita e infallibile». Le conseguenze di ciò sono evidenti: «prese insieme queste proprietà della geometria euclidea fornivano a matematici, scienziati e filosofi quella che essi consideravano la prova più autorevole del fatto che esistono verità informative ineluttabili sull'universo»[3]. Queste considerazioni furono date per scontate sino al XIX secolo, ma erano davvero valide? Si incominciò così a pensare che la geometria euclidea non fosse la sola possibile, non solo a livello puramente speculativo, ma anche nella descrizione del mondo fisico. La nascita dei primi segnali di incertezza sulla verità euclidea e il sorgere di nuove geometrie, fecero da sfondo al così detto Shock del futuro.

Geometria euclidea e il V postulato

Le fondamenta della geometria euclidea furono poste dal matematico greco Euclide d'Alessandria nel 300 a.C. Nella sua monumentale opera *Gli Elementi,* Euclide tentò di erigere la geometria su un presupposto logico ben definito. Il merito di Euclide sta proprio nell'aver definito, per la prima volta, in modo logico e coerente, una sistemazione teorica delle fondamenta della geometria. L'importanza degli Elementi, al di là dell'aspetto puramente matematico, si scorge soprattutto nel fatto che Euclide utilizzi per la prima volta il metodo ipotetico – deduttivo, metodo su cui si è ispirata tutta la matematica sino primi decenni di questo secolo. Inoltre si può dire che Euclide abbia definito la geometria e la matematica come dimostrazione. Egli infatti «iniziò con dieci assiomi che si presumevano verità incontentabili, e sulla base di quelle dieci asserzioni cercò di dimostrare un gran numero di proposizioni ricorrendo esclusivamente a de-

---

1 Mario Livio, Dio è un matematico, pp. 204 - 205

2 Kant, 1781

3 Mario Livio, Dio è un matematico, p. 205

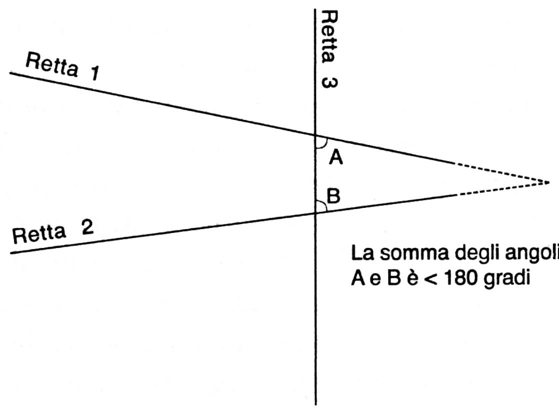
duzioni logiche»[1] . Se da un lato l'intuizione è resa esplicita, dall'altro è limitata al massimo, ogni altra proposizione, infatti, all'infuori di quelle verità garantite dall'evidenza intuitiva, gli assiomi e i postulati, deve essere dimostrata. Da ciò, per così dire, discerne quella scarsa fiducia dei matematici nella pura intuizione, è risaputo, infatti, come i matematici vogliano sempre la dimostrazione anche delle cose più evidenti. Per questo motivo, spesso, molte teorie matematiche vengo elaborate e rielaborate, non per ampliarne i risultati, ma per renderle più rigorose possibili. In questo senso è chiaro che se tutto l'edificio della geometria poggia su questi pochi postulati, per quanto evidenti e semplici possano essere, la veridicità della teoria è data dagli assiomi stessi. Se solo uno degli assiomi si rivelerà falso, tutto il corpus della teoria che fa uso di quell'assioma, viene a cadere come un castello di carta. Ovviamente questo è un appunto che vale per qualsiasi tipo di teoria, come per la relatività, se un solo esperimento dovesse mettere in evidenza che la velocità della luce si può superare tutto il corpus della teoria viene a cadere.

L'intera geometria euclidea è, dunque, basata su pochi e semplici postulati e la loro veridicità è data dall'estrema evidenza e facilità. Quelli che Euclide chiama postulati sono cinque:

«*Risulti postulato:*

1. *Che si possa condurre una linea retta da qualsiasi punto a ogni altro punto;*
2. *E che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta:*
3. *E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni raggio;*
4. *E che tutti gli angoli retti sono eguali tra loro;*
5. *E che, se una retta venendo a cadere su due rette, forma gli angoli interni e dalla stessa parte la cui somma sia minore di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verrano ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli la cui somma è minore di due retti.*»[2]

Come si vede «i primi quattro assiomi sono caratterizzati da un'estrema semplicità e da un squisita concisione [...]. Al contrario, il quinto assioma, noto come il postulato delle parallele, è [come è facile notare] più complicato nella sua formulazione e molto meno ovvio»[3]. Il suo significato geometrico si può vedere in figura a pagina seguente: è chiaro che se la somma degli angoli interni A e B è pari a 180°, le rette 1 e 2 risulteranno parallele, ecco perché viene spesso chiamato postulato delle parallele. «Benché nessuno dubitasse della sua verità, il postulato delle parallele mancava dell'affascinante semplicità degli altri assiomi. [Inoltre] Tutto indica che

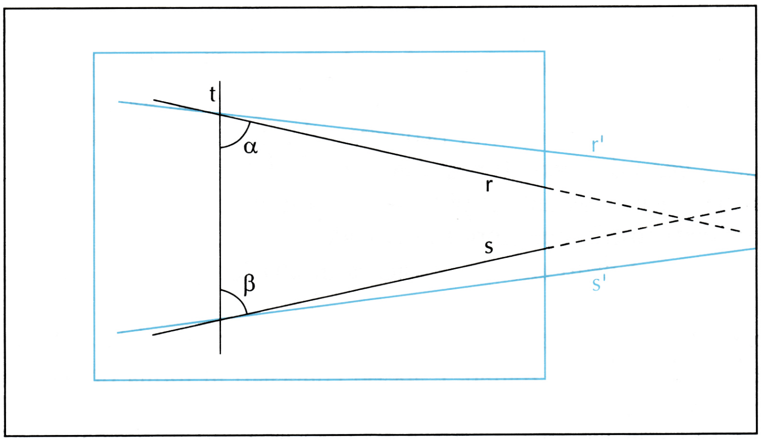


1 Ibidem, p. 206

2 Cit. da traduzione de *Gli Elementi* di Euclide a cura di Frajese e L. Maccioni, 1970

3 Mario Livio, Dio è un matematico, p. 206

nemmeno Euclide era completamente soddisfatto del quinto assioma: nelle dimostrazioni delle prime ventotto proposizioni degli Elementi non vi risorse mai»[1] . I primi tre postulati hanno un'evidenza intuitiva: chiunque abbia mai avuto a che fare con riga e matita non avrà certamente avuto difficoltà ad ammettere che si possano unire due punto con un segmento, o che si possano prolungare i segmenti o che si possano tracciare circonferenze con raggio e centro qualsiasi. Il IV potrebbe recare qualche difficoltà, ma con qualche dimostrazione è possibile dimostrarlo come teorema dagli altri tre. Al contrario l'evidenza del V postulato non è affatto immediata, e per certi versi potrebbe sembrare incomprensibile; inoltre non rimanda a nessuna costruzione geometrica. Un'altra considerazione sta nel fatto che mentre gli altri postulati rimangono comunque validi anche se limitiamo la nostra porzione di piano, così non è per il V postulato.



Considerando la figura sopra, le due rette *r* e *s*, pur formando con la trasversale *t* angoli coniugati interni α e β, tali che la loro somma sia minore di π, come prescrive il V postulato, esse non si incontrano nella parte di piano delimitata dal rettangolo in azzurro. Invero si incontreranno, ma estendendo il nostro piano al rettangolo in nero. Considerando piani limitati sarà sempre possibile trovare rette, come le rette *r'* e *s',* che non si incontrano se non estendendo il piano considerato. Quindi si conclude che il V postulato non vale in ogni parte di piano limitata. Inoltre esso non ci dice se sia sempre valido considerando piani illimitati, oppure no. Tuttavia non è possibile rinunciare a tale postulato in quanto da esso dipendono numerosi teoremi fondamentali tra cui, per citarne qualcuno, il teorema della somma degli angoli interni di un triangolo[2], il teorema di Pitagora o i teoremi del parallelogrammo. Per la sua difficoltà intrinseca si è cercato dunque di eliminare il più possibile il ricorso a tale postulato, senza minare l'edificio teorico della geometria euclidea. In particolare «con il passare dei secoli la crescente insoddisfazione nei riguardi del quinto assioma produsse un certo numero di tentativi di dimostrarlo per mezzo degli altri nove assiomi o di rimpiazzarlo con un postulato più ovvio. Di fronte al susseguissi dei fallimenti, altri geometri cominciarono a cercare di rispondere a una suggestiva domanda ipotetica: e se il quinto assioma non si fosse dimostrato vero? *Alcuni di questi*

1 Ibidem, p. 206

2 Che dice che in un triangolo qualsiasi la somma degli angoli interni è sempre uguale a π.

sforzi infruttuosi fecero sorgere dubbi assillanti sul fatto che gli assiomi di Euclide fossero realmente verità evidenti in sé stesse e non fossero invece basati sull'esperienza [il corsivo è mio]»[1].

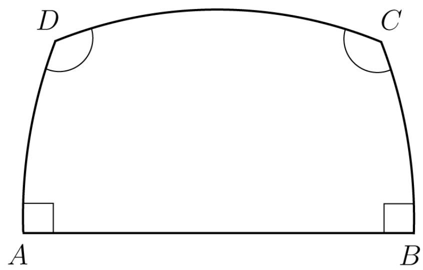
Geometria non euclidea

«I matematici hanno realizzato un gran numero di sistemi geometrici differenti. Euclidei e non euclidei, in uno, due, tre o qualsivoglia numero dimensioni. Tutti questi sistemi posseggono completa e uguale validità»

Godfrey Harold Hardy

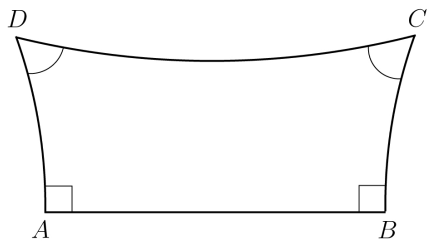
Nella serie dei tentativi falliti di dimostrare il V postulato, spicca per importanza, anche se non riuscì a trarre egli stesso una vera e propria conclusione, il tentativo da parte del matematico italiano Gerolamo Saccheri (1667 - 1733). Egli tentò di dimostrare il V postulato per assurdo, gettando inconsapevolmente le basi delle geometrie non euclidee. Il matematico considera una figura geometrica chiamata quadrilatero birettangolo: preso un segmento AB si traccino i segmenti AD e BC perpendicolari ad AB e tra loro congruenti. Si coniughino quindi i punti C e D. Saccheri si chiede cosa si può dire degli angoli C e D. Ovviamente le tre ipotesi possibili sono acuti, retti o ottusi. Nella geometria euclidea vale l'ipotesi dell'angolo retto. Perciò Saccheri, volendo dimostrare il postulato per assurdo, nega l'ipotesi dell'angolo retto, prendendo in considerazione le altre due. Ammettendo le altre due possibilità cerca, dunque, di dimostrarne le conseguenze per giungere ad una contraddizione, e quindi alla negazione dell'ipotesi.

Prendendo in considerazione l'ipotesi dell'angolo ottuso egli giunge ai seguenti risultati: la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre maggiore di π e una perpendicolare e una obliqua a una stessa retta si incontrano sempre. Quest'ultima proprietà permette, però, a Saccheri di dedurre il postulato delle parallele, e di conseguenza giunse alla conclusione che l'ipotesi dell'angolo ottuso è contraddittoria. In realtà come vedremo inseguito da tale proposizione nascerà la geometria ellittica di Riemann.



Rimane aperta l'ipotesi dell'angolo acuto. Tentando di dimostrare una contraddizione legata a tale ipotesi giungerà alle seguenti conseguenze:

- La somma degli angoli interni di un triangolo è sempre minore di π;
- Data una retta *r* e un punto P fuori di essa esistono almeno due rette parallele a *r* e passanti per P;



1 Mario Livio, Dio è un matematico, pp. 207 - 208

- Si possono trovare una perpendicolare e una obliqua a una stessa retta che non si incontrano, (il che equivale a dire che esistono infinite rette non seccanti *r*).

Saccheri, pur non giungendo ad una vera e propria contraddizione, concluderà, ugualmente, in ragione dell'ultima proposizione, che l'ipotesi dell'angolo acuto è «ripugnante alla natura di linea retta», e quindi contraddittoria. Infatti quest'ultima conseguenza ci porta ad affermare l'esistenza di una perpendicolare comune a una coppia di rette asintotiche[1]. Invero, tuttavia, dall'ipotesi dell'angolo acuto, non vi è nessuna contraddizione e Saccheri ha inconsapevolmente scoperto e dimostrato numerose proprietà della geometria iperbolica.

Da questo tentativo di Saccheri di «sostituire il quinto postulato con un diverso enunciato [numerosi matematici] compresero che potevano esistere geometrie alternative a quella euclidea»[2]. Scrive il famoso matematico Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855): «Nelle ore libere ho pensato anche a un altro tema [...] e cioè ai primi fondamenti delle geometria [...] la mia convinzione, che non possiamo fondare la geometria completamente a priori, è divenuta, se possibile, ancora più salda. Nel frattempo, non mi dedicherò ancora per molto tempo a elaborare per una pubblicazione le mie molto estese ricerche sull'argomento, e ciò forse non avverrà mai durante la mia vita, perché temo gli strilli dei Beoti, qualora volessi completamente esprimere le mie vedute»[3].

Ho più volte parlato di geometria ellittica o sferica ed iperbolica, ma che differenza c'è? L'unica differenza sta in una diversa interpretazione, o *scelta*, nel postulato delle parallele. «Il sorprendete verdetto finale sarebbe arrivato nel XIX secolo: era possibile creare nuovi tipi di geometria *scegliendo* un assioma diverso dal quinto di Euclide. Inoltre, queste geometrie non euclidee potevano, in linea di principio, descrivere lo spazio fisico altrettanto accuratamente quanto la geometria euclidea! [essendo osservatori interni, infatti, non potremmo mai capire in quale tipo di geometria viviamo. Per noi una geodetica sarà sempre una retta, anche se è curva!] [...] Per millenni, la geometria euclidea era stata considerata unica e *inevitabile*: la sola vera descrizione possibile dello spazio. Il fatto che adesso si potesse scegliere gli assiomi e ottenere una descrizione ugualmente valida rivoluzionava l'intero concetto. Quel sistema deduttivo sicuro, costruito con cura, diventava di colpo simile a un gioco in cui gli assiomi avevano semplicemente il ruolo di regole. *Era possibile cambiare gli assiomi e divertirsi in un gioco diverso* [il corsivo è mio]»[4].

---

1 Per retta asintotica si intende una retta che si avvicina infinitamente ad una curva, senza mai seccarla. Si potrà vedere in seguito il significato geometrico di tale affermazione nella trattazione della geometria iperbolica di Lobačevskij; tale affermazione è infatti una definizione di rette parallele nella geometria iperbolica, che Lobačevskij riprenderà da Saccheri.

2 Mario Livio, Dio è un matematico, pp. 208 - 209

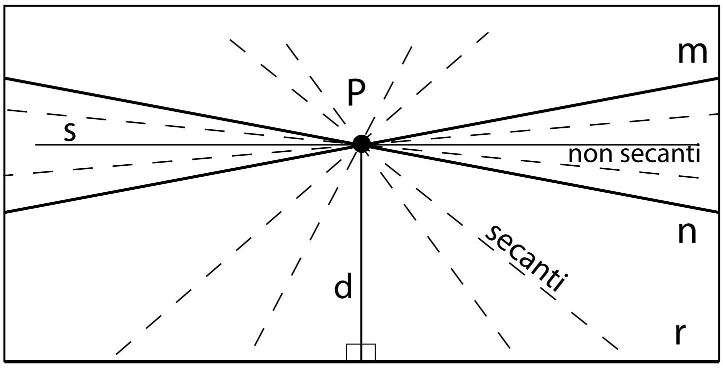
3 Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) da una lettera a F. W. Bessel, 27 gennaio 1829. Gauss chiamava "beoti" coloro che seguivano la filosofia kantiana, in merito al fatto che la geometria euclidea, fosse per Kant, una conoscenza a priori non basata sull'esperienza.

4 Mario Livio, Dio è un matematico, p. 208

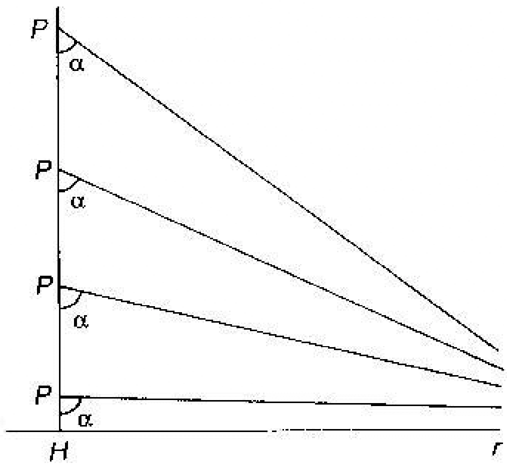
LOBAČEVSKIJ E LA GEOMETRIA IPERBOLICA

Nei primi decenni del XIX secolo l'idea che il V postulato non possa essere dimostrato è ormai comunemente accettata. Parallelamente, tuttavia, comincia a diffondersi l'idea che una negazione del postulato stesso possa contribuire alla formulazione di una geometria diversa, senza però che vengano intaccati i primi quattro postulati e i teoremi ad essi associati. Operando una scelta tra quali ipotesi ammettere, all'interno del V postulato, è possibile dunque creare una geometria indipendente dalla geometria euclidea e dal postulato delle parallele. Furono molti i matematici che si cimentarono in questo arduo compito, fra cui lo stesso Gauss, ma si può citare anche Jànos Bolyai (1775 - 1856) il quale scrisse ad una lettera al padre: «Ho scoperto cose così magnifiche che ne sono rimasto sbalordito. [...] Ho creato un altro, nuovo universo dal nulla». Tuttavia il primo a pubblicare un vero e proprio trattato «su una geometria di nuovo tipo» organizzando in un sistema valido e logicamente coerente i risultati dei suoi predecessore a cui aggiunge i propri, fu il matematico russo Nicolaj Ivanovic Lobačevskij (1793 - 1856) attorno al 1830. A lui va il merito di aver espresso quella che egli chiama «geometria immaginaria» e che inseguito prederà il nome di geometria iperbolica.

Nella geometria formulata da Lobačevskij il teorema delle rette parallele diventa: «Data una retta e un punto che non giace sulla retta, esistono almeno due rette per quel punto parallele alla retta data». Tale considerazione differisce notevolmente con l'usuale concetto di parallelismo, e per certi aspetti può non sembrare coerente, ma essa lo è quanto la geometria euclidea. Ricordo che si è già incontrati una tale considerazione, ossia sono le medesime conclusioni cui giunge Saccheri considerando l'ipotesi dell'angolo acuto. Le rette che Lobačevskij chiama parallele, infatti, non sono altro che le rette asintotiche di Saccheri.



Considerando la figura sopra, sia *r* una retta che giace sulla porzione di piano delimitata dal rettangolo in nero, P un punto non appartenente ad essa e PH la perpendicolare condotta da P a *r*. Si tracci la retta *s* passante per P e perpendicolare a PH. Nella geometria euclidea tale retta è l'unica parallela, e quindi *l'unica non secante*, la retta *r* passante per P. Tuttavia nella geometria iperbolica tale retta appartiene ad *una delle infinite rette non secanti r*. Se consideriamo le rete *m* e *n*, esse sono sempre due rette non secanti, ma assumono un comportamento asintotico, ossia si avvicinano infinitamente ad *r* senza mai incontrarla. Tali rette particolari sono quelle che Lobačevskij chiama parallele; esse delimitano i due angoli in cui vengono a cadere le rette non seccanti e quelle secanti. L'angolo acuto che esse formano con la perpendicolare PH è chiamato angolo di parallelismo; egli dimostra che tale angolo dipende dalla distanza *d* di P dalla retta *r*. In particolare dice che all'aumentare della distanza *d* del punto P dalla retta *r*, l'angolo di parallelismo diminuisce, fino a tendere a 0 per *d* che tende all'infinito; viceversa se *d* tende a 0, l'angolo diminuisce sino a tendere a 90°. Questo significa, come si può osservare nella figura a fianco, se P si avvicina infinitamente ad H, l'angolo di parallelismo tende a 90°, e quindi il significato di parallelismo viene ad identificarsi con il significato di parallelismo nella geometria euclidea, ossia, *esiste nella geometria iperbolica un intorno di spazio infinitamente piccolo nel quale è valida la geometria euclidea.* E quindi si può ancora dire che oggetti estremamente piccoli nella geometria iperbolica assumono le stesse caratteristiche della geometria euclidea.



L'accettazione del postulato delle parallele di Lobačevskij porta ad altre importanti conseguenze, tre le quali vediamo:

- nessun quadrilatero è un rettangolo;
- per un triangolo qualsiasi, la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre minore di π.

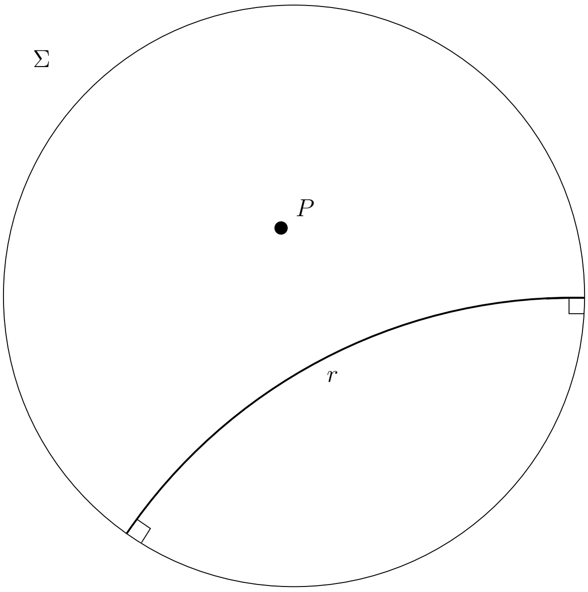
Queste considerazioni possono risultare paradossali e completamente divergenti dall'esperienza. Tuttavia tali risultati nascono dalla concezione della geometria di Lobačevskij. Scrive infatti nella sua opera *Nuovi principi della geometria*: «I vani sforzi compiuti dai tempi di Euclide, per corso di duemila anni, mi spinsero a sospettare che nei concetti stessi della geometria non si racchiuda ancora quella verità che si vuole dimostrare, e che può essere controllata, in modo simile alle altre leggi della fisica, soltanto da esperienze, quali, ad esempio, l'astronomia». Egli concepisce l'idea che lo spazio fisico abbia caratteristiche divergenti dalla geometria euclidea, e inoltre ritiene che la geometria non debba essere fondata su enti ideali, bensì da oggetti tangibili e più vicini all'esperienza sensoriale. Queste considerazioni portano Lobačevskij a considerare vero solo ciò che è dimostrabile con l'esperienza. Effettivamente se noi costruissimo lo schema di figura precedente in un foglio di carta, considerando il foglio come piano non estensibile, incontreremo sicuramente due rette che, nel foglio, non incontreranno la retta data, ma vi si avvicineranno infinitamente ad essa.

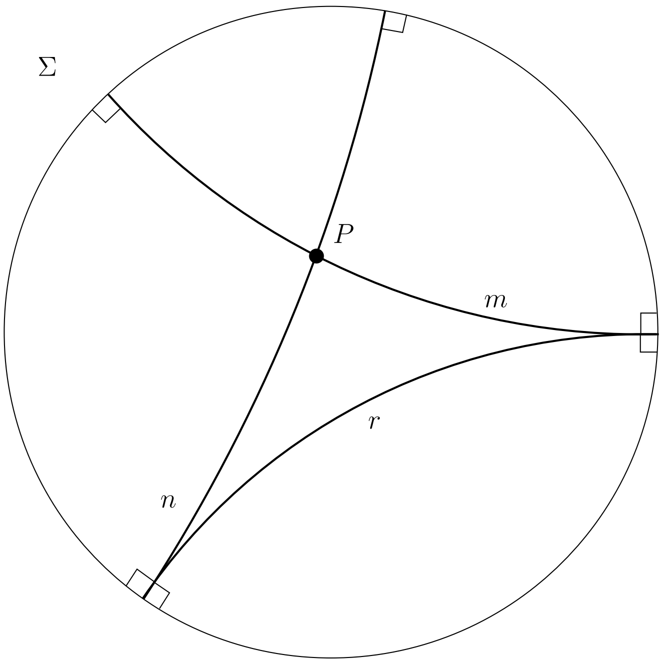
Il modo più semplice per osservare e capire queste considerazioni legate alla geometria iperbolica è utilizzare uno dei modelli che sono stati formulati da matematici come Klein, Beltrami o Poincaré, della geometria iperbolica su uno spazio euclideo. Come si è visto scegliendo fra uno dei possibili il postulato delle parallele si può giungere ad una nuova geometria. Allo stesso modo *interpretando* in modo differente i concetti di punto, retta, piano ecc., coerentemente con la teoria, si può giungere ad un modello in cui si può verificare la formulazione teorica. Beninteso che il modello deve essere coerente con la teoria, anche in questo caso, interpretando in modo differente i concetti, si può giungere a modelli che differiscono leggermente gli uni dagli altri. Per quel che riguarda la geometria iperbolica analizzerò il modello di Poincaré, e lo metterò ad un breve confronto con il modello di Beltrami.

Modello di Poincaré

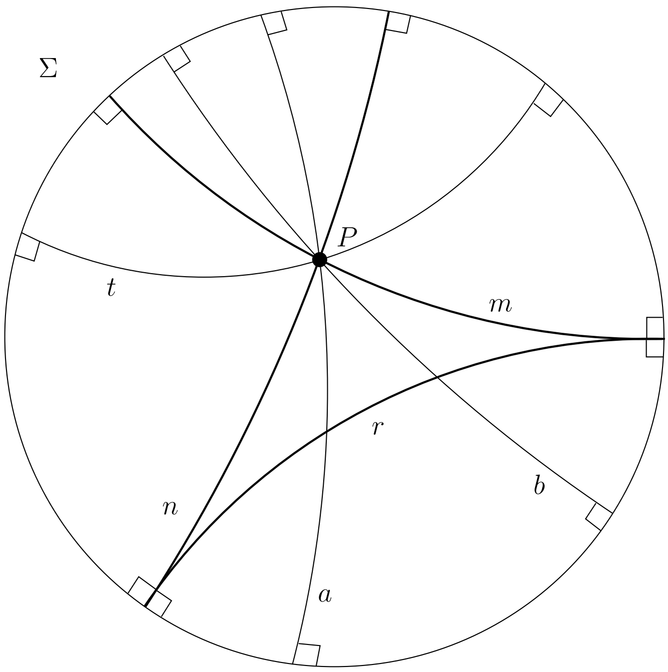
Poincaré costruisce un modello della geometria iperbolica basandosi sulla formulazione teorica di Lobačevskij. Fissata una circonferenza euclidea Σ (sigma), Poincaré utilizza le seguenti considerazioni:

- Si considerino i punti del piano iperbolico come punti interni alla circonferenza Σ, esclusi al più gli estremi;
- Le rette: archi di circonferenza euclidee perpendicolari, nei loro estremi, alla circonferenza Σ, esclusi al più gli estremi, (le rette tangenti alla circonferenza Σ sono perpendicolari alle rette tangenti all'arco di circonferenza).

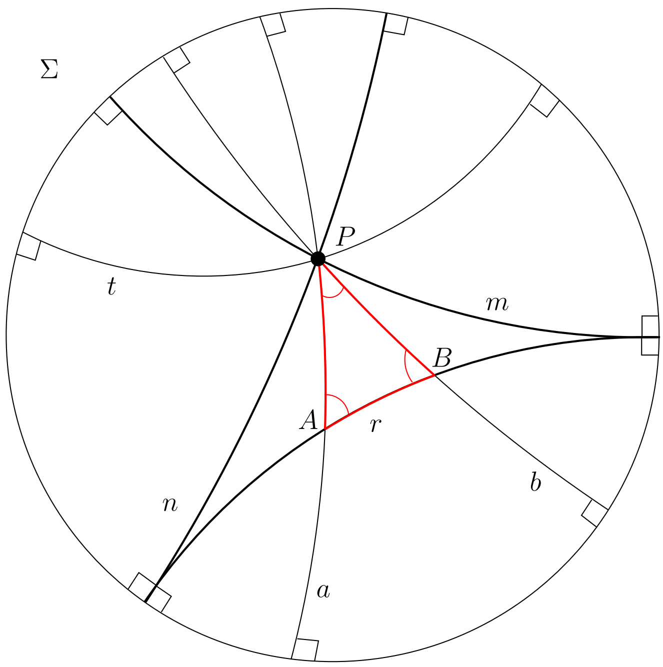




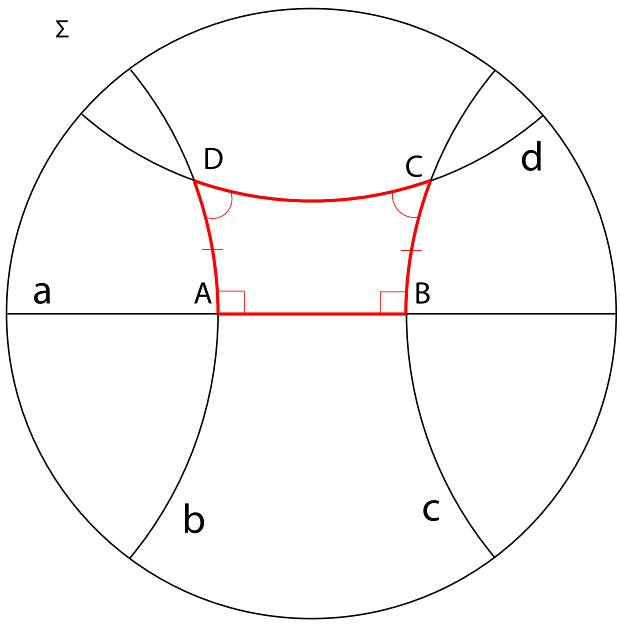
Considerando la figura a fianco siano Σ un piano iperbolico, *r* una retta qualsiasi e P un punto fuori di essa. Le rette *m* ed *n* passanti per P sono le rette parallele alla retta *r*. Come si vede le rette *m* ed *n* hanno un comportamento asintotico: essendo gli estremi di qualsiasi retta esclusi dal modello, esse si avvicinano infinitamente alla retta *r*, senza mai seccarla. Si osservi che ciò accade anche estendendo all'infinito il piano iperbolico, o la circonferenza che delimita i punti del piano iperbolico.



Considerando l'immagine di seguito, invece, si traccino le rette *t*, *a* e *b*. La retta *t* sarà una tra le infinite rette, comprese tra *n* e *m*, non seccanti *r*, che Lobačevskij chiama *iperparallele*; mentre *a* e *b* sono due tra le infinite rette secanti *r*, comprese tra *n*, *m* ed *r.* (Si ricordi che nella geometria euclidea l'unica retta non seccante un un'altra è la sa parallela).



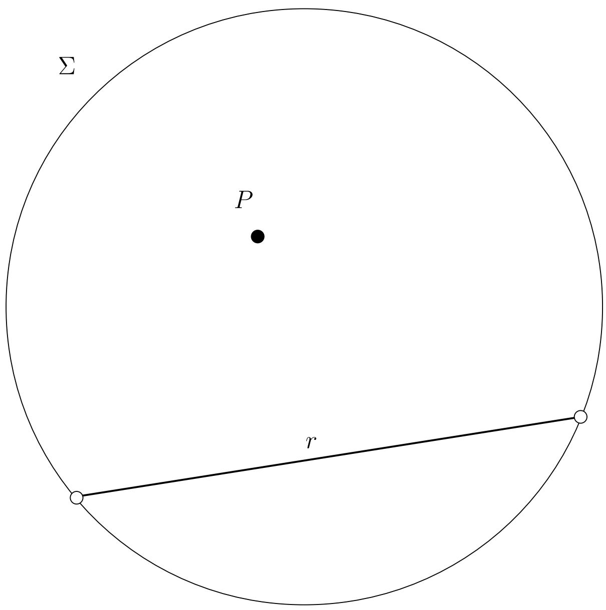
La figura che si viene a formare tra l'intersezione delle rette *a* e *b* con la retta *r,* nei punti A e B, e il punto P, viene chiamato *triangolo iperbolico.* Come si vede la somma degli angoli interni del triangolo APB è minore di π.

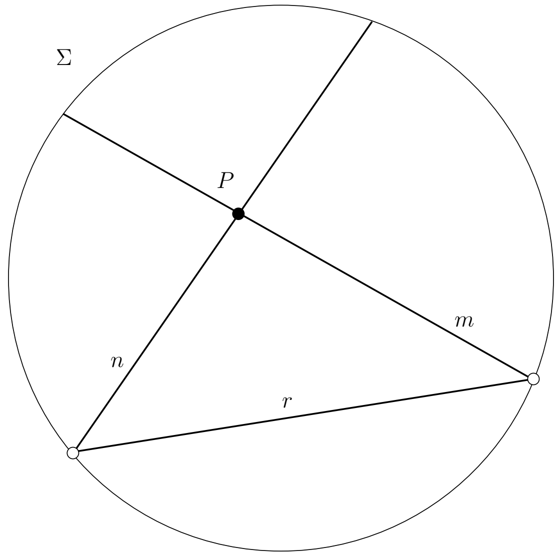


Risulta evidente che anche i diametri della circonferenza Σ, sono rette iperboliche: esse sono sempre perpendicolari alla circonferenza. Considerando l'immagine a fianco, la figura ABCD formata con l'intersezione tra le quattro rette *a*, *b*, *c* e *d*, è un quadrilatero iperbolico e più precisamente un quadrilatero birettangolo isoscele. Si vede come non possano esistere quadrilateri con quattro angoli retti. Allo stesso modo si può disegnare un quadrato, tracciando quattro rette congruenti.

Modello di Beltrami

Per mettere in evidenza la possibilità di una diversa interpretazione, pur mantenendo valida e coerente la teoria, esporrò brevemente alcune considerazioni del modello del matematico italiano Beltrami. Come si vede dalla figura sotto egli considera il piano iperbolico costituito dall'insieme dei punti interni alla circonferenza Σ, esclusi al più gli estremi; e come rette iperboliche, corde della circonferenza, escludendo sempre gli estremi.





Anche in questo caso si può rappresentare il postulato delle parallele di Lobačevskij utilizzano le considerazioni di Beltrami. Sia Σ il nostro spazio iperbolico, la retta *r*, il punto P, e le due retta *n* ed *m*. Essendo gli estremi esclusi dal modello, le due rette non intersecheranno mai la retta *r*, pur estendendo all'infinito la nostra circonferenza. Quindi esse assumono un comportamento asintotico e sono le due parallele iperboliche alla retta *r*.

Dal punto di vista didattico il modello di Beltrami, simile a quello di Klein, risulta essere più complesso. Soprattuto per una differente definizione della metrica: anche se il modello è, infatti, simile alla geometria euclidea esso presenta una diversa definizione di distanza che rende diversa, quindi, la misura di un angolo o di una lunghezza.

In conclusione i modelli sono stati essenziali nell'accettazione, da parte dei matematici, delle geometria non euclidee ed della loro coerenza. Da quanto ho esposto si può infatti mettere in evidenza che interpretando nel modo corretto i concetti delle geometria nonché le relazioni di uguaglianza, similitudine e di distanza, tutti i teoremi e gli assiomi della geometria iperbolica risultano validi e coerenti, nel modello. Quindi ne consegue che se dovesse nascere una contraddizione tra la teoria e i modelli, questa sarebbe dimostrabile negli enti del modello stesso, e quindi attraverso gli enti della geometria euclidea. Ne deriva, quindi, che questa stessa contraddizione sarebbe una contraddizione all'interno della geometria euclidea. Se la geometria euclidea è coerente dunque lo è anche la geometria iperbolica.

Riemann e la Geometria Ellittica

In un'annotazione del suo diario nel settembre del 1799, Gauss scrisse: «Sui princìpi della geometria abbiamo fatto ottimi progressi». Ed in effetti la geometria iperbolica non fu l'unica geometria possibile. «La geometria iperbolica piombò nel mondo della matematica come un fulmine a ciel sereno, assestando un colpo tremendo alla convinzione che la geometria euclidea fosse l'unica infallibile descrizione dello spazio. Prima del lavoro di Lobačevskij la geometria euclidea era, a tutti gli effetti, il mondo naturale. Il fatto che fosse possibile selezionare un diverso insieme di assiomi e costruire un diverso tipo di geometria sollevò per la prima volta il sospetto che la matematica fosse un'invenzione dell'uomo e non la scoperta di una verità [...]. Lo status privilegiato della geometria euclidea subì un altro colpo quando uno degli studenti di Gauss, Bernhard Riemann (1826 - 1866), dimostrò che la geometria iperbolica non era l'unica geometria non euclidea possibile»[1].

1 Mario Livio, Dio è un matematico, p. 214

La geometria iperbolica, come ho messo in evidenza, nasceva dalla negazione del V postulato delle parallele considerando l'ipotesi ancora aperta dell'angolo acuto di Saccheri, ma cercando comunque di salvare il resto della geometria euclidea. Si ricordi infatti, che tutti i teoremi e le dimostrazioni della geometria euclidea che non fanno ricorso al V postulato sono espresse e dimostrate in modo identico anche nella geometria iperbolica. Tuttavia rimase ancora aperta l'ipotesi dell'angolo ottuso. Nonostante essa dia origine a una serie di contraddizioni legate a particolari concetti della geometria euclidea, è comunque sia maturata l'idea che si potesse giungere ad un'altra geometria non euclidea compromettendone ancora qualcosa che avrebbe assicurato la coerenza con la negazione del postulato delle parallele e l'ipotesi dell'angolo ottuso[1].

Nella geometria iperbolica infatti, come nella geometria euclidea, si prende in considerazione, seppur tacitamente, il fatto che il piano e le rette siano infinite. Riemann, invece, assume proprio il contrario. Egli fu il primo a mettere in evidenza la distinzione tra i termini *illimitato* e *infinito*. Il primo concetto è relativo all'estensione ossia è un concetto *qualitativo*; mentre il secondo è relativo alla misura, o metrica, ed è un concetto *quantitativo*. Per meglio comprendere la distinzione tra questi due termini possiamo immaginare una retta chiusa su sé stessa, a formare un cerchio. Essa sarà finita ma illimitata: considerando infatti un punto della retta esso percorrerà una distanza finita per giungere al punto di partenza, ma lo può fare illimitate volte. Quindi uno spazio può essere illimitato, ma questo non ne implica necessariamente l'infinità.

Il matematico afferma che è possibile ipotizzare uno spazio che sia insieme illimitato e finito. Come si può certamente notare la superficie di una sfera, per esempio, sarebbe illimitata ma finita. Tracciare delle rete su questa superficie porterebbe a tracciare delle circonferenze massime, illimitate e finite. Da queste considerazioni si può dedurre una negazione del postulato delle parallele e quindi la costruzione di una nuova geometria non euclidea è possibile. Se si considerano in una sfera due o più circonferenze massime, ne risulta evidente che nessuna può essere parallela: tutte le rette così definite, infatti, si incontreranno necessariamente in due punti diametralmente opposti. «Di conseguenza, a differenza della geometria euclidea, dove c'è esattamente una parallela che passa per un punto esterno a una retta data, e della geometria iperbolica, dove tali parallele sono almeno due, *non esistono* parallele nella geometria su una sfera»[2].

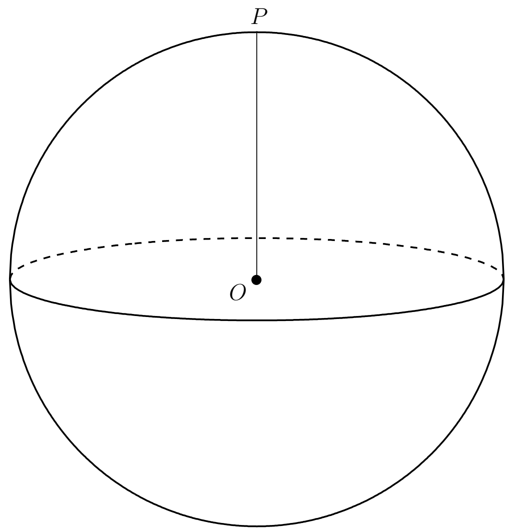
Furono proprio queste considerazioni che portarono Riemann, attorno al 1850, sulla strada della geometria sferica e poi ellittica, ossia proprio la geometria che si ritroverebbe sulla superficie di una sfera. La geometria sferica e la geometria ellittica sono leggermente differenti, in particolare la geometria non euclidea propriamente detta è la geometria ellittica, che è una generalizzazione della geometria sferica. La sferica, inoltre, si basa considerando una sfera, mentre l'ellittica considerando una semisfera, in cui localmente, si ritrova la geometria sferica.

---

1 Invero è necessario fare una puntigliosa distinzione, si è soliti separare il postulato delle parallele (Data una retta e un punto P fuori di essa esiste una e una sola retta passante per P e parallela alla retta data) con il V postulato di Euclide, essi esprimono la stessa cosa, nel senso che il primo ha un significato più restrittivo: come vedremo fra poco, la negazione del primo, non comporta, necessariamente, la negazione del secondo. In queste nuova geometria non euclidea sarà negato il postulato delle parallele ma non completamente il V postulato di Euclide.

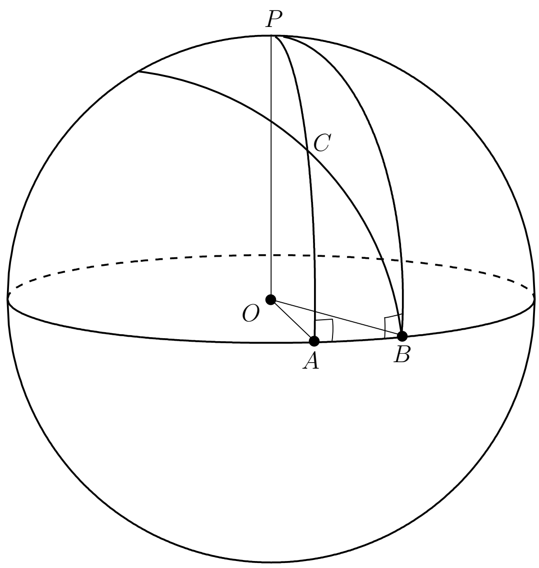
2 Mario Livio, Dio è un matematico, p. 216

Riassumendo le caratteristiche generali della geometria sferica date da Riemann si ha:



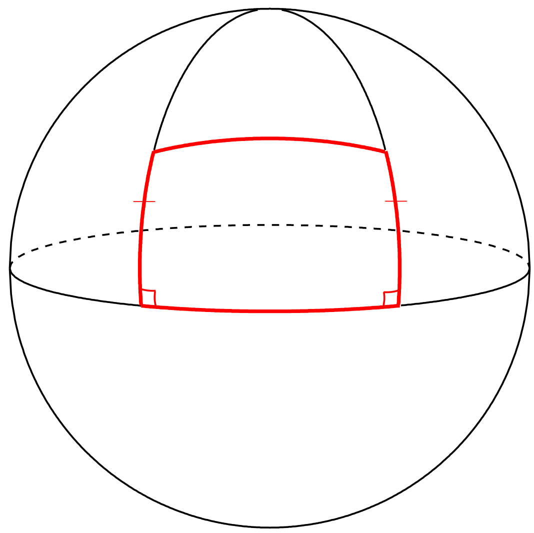
- Le rette sono linee chiuse illimitate e finite o circonferenze massime, date dall'intersezione di una sfera con piani tutti passanti per un unico punto O, centro della sfera (è evidente che segmenti sono archi di circonferenze)[1];
- Per due punti diametralmente opposti passano infinite rette;
- Data una retta e un punto fuori di essa non esistono parallele alla retta data; e quindi si deduce il postulato di Riemann, in cui *due rette qualsiasi hanno sempre almeno un punto in comune*;
- La somma degli angoli interni di un triangolo sempre maggiore di π.

Considerando la figura seguente sono rappresentati delle rette e dei segmenti sferici. Per esempio considerando i punti A e B, si deve a Riemann l'introduzione del termine geodetica, già noto per la relatività generale, con il significato di curva minima che unisce due punti nello spazio curvo. Procedendo in senso antiorario da A verso B, il segmento AB è quindi una geodetica che unisce il punto A con il punto B, mentre non lo è il segmento che unisce il punto B con il punto A, in quanto di lunghezza notevolmente maggiore. Allo stesso modo sono segmenti e geodetiche i tratti AP, AC, BP e BC. Estendendo, poi, i segmenti AP e BP a formare delle rette (circonferenze massime) si può notare che esse si incontrano nello stesso punto P e P' (P' diametralmente opposto a P, non disegnato nello schema). Essi possono essere visti come meridiani, ossia una serie di rette che si formano dall'intersezione della sfera con un piano che ruota passante per O. Si può ancora dire che le figure ACB e APB, sono due triangoli sferici, e si può facilmente notare come la somma degli angoli interni sia maggiore di π. Ovviamente questo vale per tutti i triangoli sferici.



1 Vorrei mettere in evidenza che anche se si parla di sfere o piani, che nella geometria euclidea corrispondono a enti dello spazio a tre dimensioni, stiamo comunque sempre considerando uno spazio non euclideo a due dimensioni.

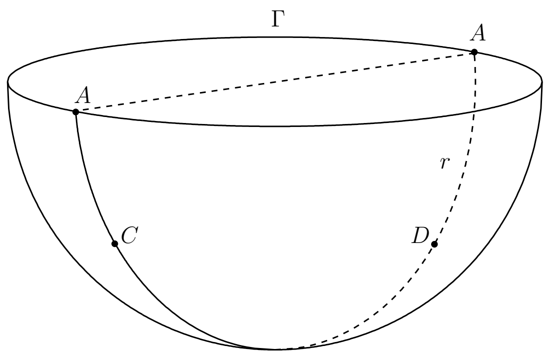
Allo stesso modo è possibile costruire, come per la geometria iperbolica, un quadrilatero. Osservando la figura esso è formato dall'intersezione di quattro rette, formate a loro volta da quattro piani passanti per il centro della sfera. Si può notare che esso è il quadrilatero birettangolo trovato da Saccheri nell'ipotesi dell'angolo ottuso, ed in effetti la somma degli angoli interi è maggiore di 2π.



Questo descritto è ovviamente un modello della geometria sferica, che rispecchia la coerenza della teoria. Tuttavia al contrario della geometria iperbolica è stato necessario modificare altri postulati della geometria euclidea per far diventare coerente la negazione del postulato delle parallele con l'ipotesi dell'angolo ottuso: si è dovuti *rinunciare al postulato secondo cui per due punti passa una e una sola retta.*

Nello sforzo di giungere ad una generalizzazione e di conservare il postulato secondo cui per due punti passa una e una sola retta, Riemann giunge alla geometria ellittica, la geometria non euclidea vera e propria.

Si consideri dunque una semisfera e il suo bordo Γ (gamma).



Ovviamente per quanto riguarda le retta anche in questo caso valgono le stesse considerazioni della geometria sferica. Si considerino quindi due punti C e D non diametralmente opposti e si tracci la retta *r* passante per i due punti. La retta intersecherà il bordo della sfera nei punti A e A', diametralmente opposti, con la sola considerazione, che nella geometria ellittica *i punti diametralmente opposti vengono identificati* e considerati lo stesso punto. In questo modo, quindi, per due punti distinti passa una e una sola retta. Ovviamente anche in questo caso le rette sono linee chiuse, non vi sono parallele e la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di 2π.

Queste considerazioni, sia per la geometria sferica che per la geometria ellittica, si possono dedurre considerando un altro modello generalizzato di Riemann, detto geometria della stella di rette, di cui tratterò molto brevemente

Dato un punto O nello spazio euclideo Riemann fissa un vero è proprio vocabolario per l'interpretazione della geometria ellittica:

Geometria euclidea	Geometria della stella di rette
Punto	Retta passante per O
Retta	Piano passante per O
Semiretta	Semipiano passante per O la cui retta origine passa per O*
Angolo	Diedro** il cui spigolo passa per O
Triangolo	Unione di due triedri*** opposti al vertici, con vertice in O

É facile intuire, anche in questo modello, che se tutte le rette passano per uno stesso punto, non potranno esistere delle retta parallele.

Nel campo delle geometrie non euclidee la figura di Riemann è considerata molto importante. Egli, cercando di andare al di là di una mera modellizzazione di una geometria differente, tentò una vera e propria generalizzazione del concetto di geometria non euclidea. Riemann abbandona la tradizionale concezione della geometria intesa in senso strettamente sintetico (geometrico) e la integra con una visione più analitica, ossia più rivolta verso il calcolo. Egli «portò i concetti non euclidei un passo più avanti, introducendo geometria in spazi curvi di tre, quattro e più dimensioni»[1]. È a Riemann, infatti, che si deve una completa generalizzazione dello spazio cartesiano euclideo e non euclideo con l'introduzione delle varietà ***n - dimensionali***, ossia di superfici con un numero qualsiasi di dimensioni e curvatura. Ancora a Riemann si deve il termine di spazio curvo con il concetto di curvatura dello spazio. Intuitivamente il concetto di curvatura definisce la misura di quanto un particolare oggetto o superficie o spazio si disco-

* Se nella geometria euclidea una semiretta è una delle due parti in cui una retta resta divisa da un suo punto, nella geometria ellittica, semiretta è una delle due porzioni in cui un piano, passante per O, viene diviso da una retta che giace sul piano e passante per O.

* * Diedro: porzione di spazio compresa fra due semipiani aventi la medesima retta di origine, si può intendere come un estensione del concetto di angolo nello spazio a tre dimensioni.

* * * Triedro: figura formata dall'intersezione di tre piani.

1 Mario Livio, Dio è un matematico, p. 216

sti dall'essere piatto. «Per esempio la superficie di un guscio d'uovo ha una una curvatura inferiore intorno al suo perimetro che non lungo una linea che passa per una delle due estremità appuntire. Riemann diede una definizione matematica esatta della curvatura in spazi con un numero qualsiasi di dimensioni. In tal modo, consolidò quel legame tra algebra e geometria che era stato sancito da Cartesio. Nell'opera di Riemann le equazioni con un numero qualsiasi di variabili trovano i propri equivalenti geometrici, e i nuovi concetti di geometrie superiori finivano associati a equazioni»[1] . In merito a queste generalizzazioni la relatività generale è la più coerente applicazione del continuum quadridimensionale a curvatura variabile; gli studi di Riemann sono stati essenziali nella formulazione della relatività generale

Questi concetti stanno alla base della moderna geometria differenziale, una branca della matematica, che studia con i metodi dell'analisi infinitesimali tutte le proprietà di queste superfici, o varietà n-dimensionali. Se il problema è poi una mancata applicazione di questi concetti nel mondo fisico, come abbiamo visto, la relatività generale ci ha offerto l'esempio più eclatante di questo shock del futuro.

A concludere «La percezione euclidea dello spazio si rivelò, in fin dei conti, appresa e non intuitiva»; il relativismo entra definitivamente nella storia della matematica e della fisica, conclude il matematico Poincaré: «gli assiomi della geometria non sono giudizi sintetici a priori né fatti sperimentali. Sono delle *convenzioni*: la nostra scelta, fra tutte le convenzioni possibili, è guidata da fatti sperimentali, ma resta libera».

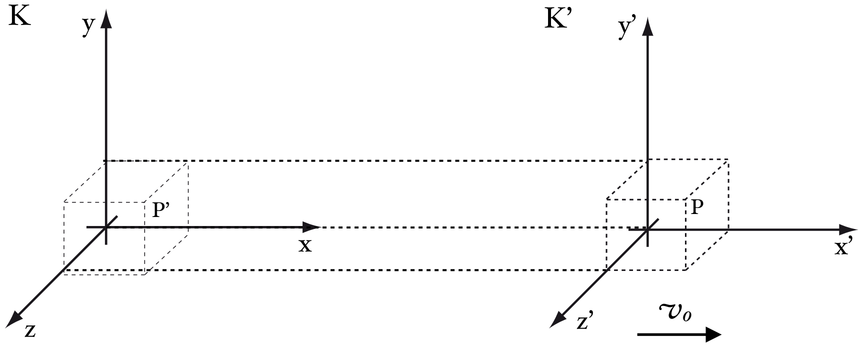
Lo scacco che le salde e antiche certezze hanno avuto dalle nuove conoscenze fu oltremodo enorme, e con molteplici conseguenze: cadeva quel grande palazzo di cristallo che i grandi matematici e fisici della storia hanno costruito con cura, e sotto il quale grandi filosofi e pensatori si sono rifugiati nella loro ricerca di una verità, una verità falsa.

1 Ibidem, p. 216

APPENDICE

TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

Dato un sistema di coordinate inerziale K (x; y; z; t) e K' (x'; y'; z'; t'), abbiamo scoperto che le trasformazioni classiche non sono più valevoli, quali sono dunque le nuove trasformazioni che permettono di passare da un SC all'altro?



Queste trasformazioni sono state scoperte molto prima della formulazione della teoria della relatività di Albert Einstein dal fisico e matematico Hendrik Antoon Lorentz (1853 - 1928) al fine di rimuovere le contraddizione esistenti tra l'elettromagnetismo e la meccanica classica; per questo vengono, generalmente chiamate Trasformazioni di Lorentz. Per dare maggior completezza formale alla relatività ristretta seguirà una breve dimostrazione delle trasformazioni di Lorentz più generali, ossia prendendo in considerazione che l'SC si muova lungo la direzione dell'asse x. Inoltre faremo uso dei postulati della relatività, ed in particolare, del principio di costanza della velocità della luce, ricordando, tuttavia, che furono sviluppati in seguito alle trasformazioni di Lorentz.

Consideriamo un SC K' in moto uniforme rispetto a K in modo che, per semplicità di esposizione, la direzione del moto sia diretta lungo l'asse x dei due SC. Le trasformazioni classiche che esprimono il passaggio da un SC all'altro, come si vede dalle equazioni, sono lineari:

$$x' = x - vt$$

$$x = x' + vt$$

Non c'è ragione di pensare dunque che anche le trasformazioni di Lorentz non siano lineari. Di conseguenza esse devono differire per una costante. Considerando quanto esposto fino ad ora, non si è potuto non notare l'enorme importanza che la velocità della luce ha assunto nella teoria, di conseguenza esse dovranno contenere al loro interno una relazione che lega la velocità v del SC e la costante c. Ciò si può dimostrare come segue. Consideriamo nell'istante $t=t'=0$ che i due SC si trovino coincidenti nell'origine O, e che siano disposti, inoltre con gli assi paralleli. Si noti, come nelle trasformazioni classiche, per proprietà isotropiche dello spazio le coordinate y e z non differiscono nella trasformazione, per cui, anche per le trasformazioni di Lorentz risulta y' = y e z' = z.

Considerando le coordinate x e x', abbiamo detto che nelle trasformazioni di Lorentz le loro equazioni differiscono per una costante rispetto alle equazioni galileiane. Siccome x' = 0 per x = *vt*, le nuove trasformazioni devono essere lineari e omogenee[1], quindi:

(1.1)
$$x' = \gamma(x - vt)$$
(1.2)
$$x = \gamma'(x' + vt')$$

Dove γ e γ' sono due costanti che potrebbero dipendere dalla velocità dell'SC. Si noti che invertendo gli assi cartesiani si invertono anche i ruoli degli SC ossia ora è K a muoversi rispetto a K': quindi si invertono i segni delle coordinate x e x' della (1.1)[2]; e anche le coordinate degli SC nella (1.2)[3], si avrà, dunque:

$$x' = \gamma(x + vt)$$
$$x' = \gamma'(x + vt)$$

Da cui si ricava γ = γ', quindi le (1.1) e (1.2) diventano:

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$x = \gamma(x' + vt')$$

Per determinare il coefficiente γ utilizziamo il postulato della costanza della velocità della luce: siccome la luce ha stessa velocità in entrambi gli SC, si può considera un raggio luminoso che parte dall'origini degli assi nell'istante iniziale. La distanza del raggio percorsa dalla luce sarà x = *ct* in K e x' = *ct'* in K'. Sostituendo quanto trovato, nella (1.1) e nella (1.2) si ricava:

$$ct' = \gamma(ct - vt)$$
$$ct = \gamma(ct' + vt')$$

da cui, moltiplicando membro a membro si ha:

$$c^2 tt' = \gamma^2 tt'(c - v)(c + v)$$
$$c^2 = \gamma^2(c^2 - v^2)$$

dove si può facilmente ricavare γ, che solitamente viene chiamato fattore di Lorentz:

1 Omogenee significa che moltiplicando tutti i termini in parentesi per una costante, si deve ottenere lo stesso risultato che moltiplicando per la stessa costante la paretesi stessa. Ciò per dimostrare che x' = Ax - A' vt = A(x - vt). Lo stesso ragionamento vale ovviamente anche per coordinata x.

2 Ovvero si ricava l'equazione che permette di passare da S' (che ora è in quiete) a S (che ora si muove rispetto a S').

3 Ossia x diventa x' e x' diventa x.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Si è scelto il valore positivo di γ per il fatto che se v ≪ c si devono ricavare la trasformazione galileiane.

Sostituendo ora γ nelle (1.1) e (1.2) e costruendo un sistema si può ricavare t':

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ x = \gamma(x' + vt) \end{cases}$$

$$x = \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt'$$

$$t' = \frac{x - \gamma^2 x + \gamma^2 vt}{v\gamma}$$

da cui, quindi:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Riassumendo si hanno le Trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Dalle quali si possono ricavare, per v ≪ c, le trasformazioni galileiane:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \cong x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right) \cong t \end{cases}$$

Osservando ancora le trasformazioni di Lorentz si può ricavare, come già ampiamente messo in evidenza precedentemente, che per $v \rightarrow c$, $\gamma \rightarrow \infty$. Ciò significa che nessun SC inerziale potrà muoversi con velocità uguale (o superiore) a quella della luce. Si ricordi, infine, che quanto dimostrato precedentemente sulle conclusioni della relatività ristretta, si possono ricavare anche dalle trasformazioni di Lorentz.

BIBLIOGRAFIA

Albert Einstein - Leopold Infeld, L'evoluzione della fisica, Torino 1965

Albert Einstein, Il significato della relatività, Roma 1997

Albert Einstein, Come io vedo il mondo. La teoria della relatività, Roma, 1975

Arrigo Amadori - Luca Lussari, Un'introduzione alla teoria della relatività, Pavia 2008

G. Longhi, Appunti di relatività speciale, 2003

Giulio Passatore, Corso sulla relatività ristretta, 2007

Dario Palladino, Le geometria non euclidee fra cultura, storia e didattica della matematica, (reperibile al sito internet http://www.dif.unige.it/epi/hp/pal/ppub.htm)

Luigi Pirandello, Uno, nessuno e centomila, Milano 1941

Mario Livio, Dio è un matematico, Milano 2009

David Bodanis, $E=MC^2$ - Biografia dell'equazione che ha cambiato il mondo, Milano 2001

Rocco Vittorio Macrì, Relativismo e pensiero debole: La perdita del fondamento, *Episteme* n. 1, 2000

Galileo Galilei, Dialogo sopra i due massimi sistemi Tolemaico e copernicano.

A.A.Michelson, E.W.Morley, On te relative motion of Earth and the luminiferous ether, American Journal of Science, 1887

Domenico Massaro, La comunicazione filosofica: il manuale, Paravia

Guido Baldi - Silvia Giuro - Mario Rametti - Giuseppe Zaccaria, La letteratura, Paravia

N. Dodero - P. Barroccini - R. Manfredi, Nuovi elementi di matematica, Ghisetti e Corvi editori

F. Cioffi - G. Luppi - A. Vigorelli - E. Zanette, Il testo filosofico, Mondadori

http://astrocultura.uai.it/astrofisica/einstein/relativita_generale.htm

http://www.fmboschetto.it/tde/copertina_unita_4.htm

http://www.spacetimetravel.org/

http://scienzapertutti.lnf.infn.it/concorso/2005/scuole_italiane/magicomondorelativita_liceoferraris/progetto/progetto.htm

http://www.ica-net.it/pascal/astronomia/files/relatività.htm

http://www.npensieri.it/

http://www.matematicamente.it/

http://www.arrigoamadori.com/lezioni/Fisica.htm

http://it.wikibooks.org/wiki/Pagina_principale

http://www.dif.unige.it/epi/hp/pal/ppub.htm