

Descrizione e commento alla sezione di matematica della prova nazionale all'esame finale del primo ciclo (a.s. 2008-2009)

Dall'analisi dei dati pubblicati nel rapporto emerge che:

- Le differenze di genere sono più forti a Nord (+0,9), Centro (+0,4) e inesistenti a Sud (+0,1). Ottengono risultati migliori le ragazze in Basilicata (circa +0,5), Calabria (circa +0,6), Umbria (circa +0,5) e Sicilia (circa +0,5), mentre non ci sono differenze sostanziali in Abruzzo, Campania, Molise, Puglia, Sardegna, Toscana. A Bolzano, in Friuli, Emilia-Romagna, Lazio, Liguria, Lombardia, Marche, Piemonte, Trento, Valle d'Aosta e Veneto ottengono risultati migliori i ragazzi (differenza superiore a 0,5), come evidenziato anche dalle ricerche internazionali.
- Rispetto all'origine degli studenti, la differenza a favore degli studenti autoctoni è, a Nord, di circa 2,5 punti, mentre diminuisce fino ad arrivare a circa 1 punto percentuale a Sud. In particolare solo alcune regioni hanno una differenza di un solo punto o minore: Basilicata, Molise, Sardegna e Umbria, mentre è uguale o superiore a 3 a Bolzano, Emilia-Romagna, Lombardia, Puglia, Sicilia, Valle d'Aosta.
- Per quanto riguarda il confronto con la prova nazionale del 2008 è bene ricordare che, dal punto di vista strettamente scientifico, non si possono operare comparazioni in quanto nelle due prove non ci sono quesiti uguali, inoltre i dati pubblicati nel rapporto 2009 si riferiscono al campione (1304 scuole), mentre quelli del 2008 sono relativi all'intera popolazione. Tuttavia poiché il campione è rappresentativo delle diverse realtà regionali, è possibile vedere per ogni regione di quanto i risultati si discostano dalla media nazionale nell'anno preso in considerazione. Nella prova di quest'anno vi sono stati risultati peggiori dell'anno passato rispetto alla media nazionale, in Umbria (-1,48), Basilicata (-1,85), Puglia (-1,11), Sicilia (-7,78), Campania (-10,37) e Calabria (-7,78). Ci sono invece stati miglioramenti in tutte le altre regioni con punte superiori a 6 in Friuli e nelle Marche.

Tavola 1. Punteggio medio grezzo corretto per regione in ordine decrescente

	MATEMATICA		
	Limite inf.	Media mat	Limite sup.
Friuli-V. G.	18,1	19,0	20,0
Marche	18,4	19,0	19,6
Lombardia	18,3	18,8	19,2
Toscana	18,8	18,8	18,8
Trento	18,4	18,6	18,8
Veneto	18,2	18,5	18,9
Liguria	18,2	18,2	18,2
Emilia-R.	17,7	18,1	18,4
Piemonte	17,5	18,0	18,4
Lazio	16,9	17,9	18,8
Valle d'A.	17,1	17,8	18,4
Bolzano	16,9	17,7	18,5
Abruzzo	16,9	17,4	17,8
Molise	16,2	17,3	18,3
ITALIA	16,9	17,2	17,5
Puglia	16,0	16,9	17,7
Umbria	15,1	16,8	18,4
Basilicata	16,2	16,7	17,2
Sardegna	15,3	16,3	17,2
Calabria	12,9	15,1	17,4
Sicilia	13,4	15,1	16,7
Campania	12,7	14,4	16,1

Considerazioni generali relative alle domande e agli ambiti

- I quesiti sono distribuiti fra gli ambiti tematici secondo la tabella seguente.

Ambiti	Numero di item
Misura, dati e previsioni	4
Numeri	5
Spazio e figure	6
Relazioni e funzioni	6
Totale	21

- **Numeri:** i risultati, in questo ambito, sono migliori rispetto allo scorso anno. Argomenti come percentuali, frazioni e confronto fra frazioni, che nell'anno passato avevano creato problemi, hanno dato risultati positivi in oltre il 70% dei casi.
- **Spazio e figure:** in questo ambito, tra gli altri, erano presenti due quesiti in cui era richiesta l'indicazione del procedimento. I risultati mostrano che questa richiesta crea non pochi problemi come si può vedere dall'analisi dei quesiti riportata di seguito.
- **Relazioni e funzioni:** i risultati sono molto positivi in richieste standard (proporzioni ed equazioni, ...), qualche problema si osserva nel quesito D6a (vedi sotto) dove si richiedeva di mettere in relazione rappresentazioni diverse (verbale e grafica) e soprattutto nel quesito D18 (costruzione di formule) in cui solo il 26,8% ha risposto correttamente. Questo potrebbe indicare una carenza di attenzione ad un approccio all'algebra legato ai diversi significati di variabile.
- **Misure, dati e previsioni:** i tre quesiti più legati alla statistica e probabilità (media, lettura di grafici e calcolo di una probabilità) hanno ottenuto un punteggio compreso fra 65% e 70%, mentre al quesito legato alla misura (stima dell'unità di misura) hanno risposto correttamente l'83,8% degli studenti.

Analisi delle singole domande suddivise per ambito

I quesiti sono raggruppati per ambito e per tipologia.

Per ogni ambito vengono indicati i numeri che individuano le domande e le percentuali di risposta per ogni opzione.

Per ogni quesito viene poi presentata una tabella con tre colonne: nella prima è riportata la domanda, nella seconda un commento e il riferimento alle Indicazioni nazionali 2007 e nella terza gli oggetti di valutazione, i processi cognitivi e i compiti così come esplicitati nel Quadro di Riferimento delle prove INVALSI¹.

Di seguito viene riportato l'elenco dei processi cognitivi indicati nel Quadro di Riferimento:

- Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (*oggetti matematici, proprietà, strutture...*)
- Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (*in ambito aritmetico, geometrico...*)
- Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (*verbale, scritta, simbolica, grafica, ...*)
- Sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (*individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,...*)
- Sapere riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura (*saper individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, saper stimare una misura,...*)
- Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (*congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, ...*)
- Utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (*descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...*).

¹ I Quadri di Riferimento delle prove INVALSI (Italiano e Matematica) sono scaricabili dal sito INVALSI www.invalsi.it

AMBITO SPAZIO E FIGURE

Domande a risposta chiusa

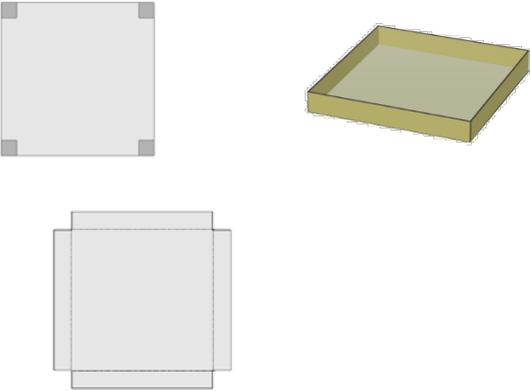
ITALIA						
Ambito di valutazione	Domanda	Mancata risposta	OPZIONI			
			A	B	C	D
Spazio e figure	D3	1,5	61,9	6,0	16,5	14,2
Spazio e figure	D8	1,4	4,3	15,4	71,4	7,5
Spazio e figure	D14a	3,3	9,0	10,2	72,3	5,2
Spazio e figure	D17	1,5	2,5	12,6	80,7	2,7
Spazio e figure	D19a	7,6	6,3	11,3	69,2	5,6

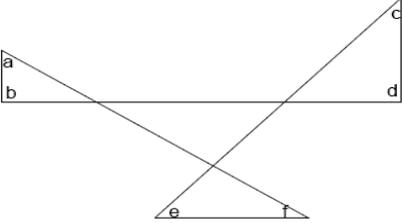
Domande a punteggio parziale

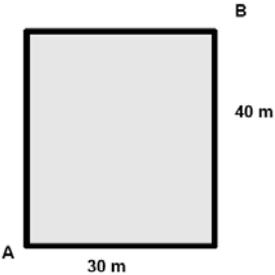
Ambito di valutazione	Domanda	Mancata risposta	Procedim. Errato	Procedim. Parzialm. Corretto	Procedim. Corretto
Spazio e figure	D14b	4,0	27,9	17,5	50,6
Spazio e figure	D19b	10,5	35,4	11,8	42,3

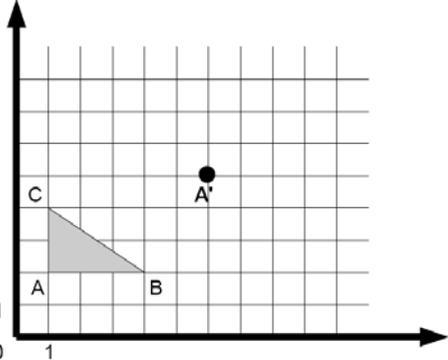
Domande a risposta aperta univoca

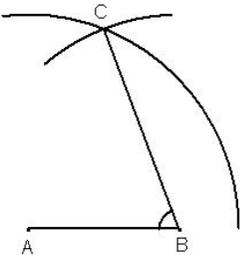
Ambito di valutazione	Domanda	Mancata risposta	Risposta Errata	Risposta Corretta
Spazio e figure	D5_1	0,3	1,6	98,1
	D5_2	0,5	7,7	91,7
	D5_3	0,7	50,1	49,2

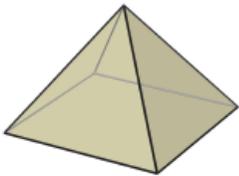
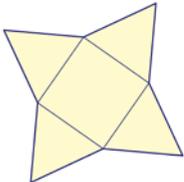
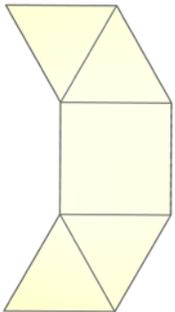
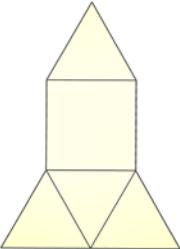
Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D3. In un foglio di cartoncino si ritaglia un quadrato di lato 10 cm. Da ogni angolo si ritaglia un quadratino di lato 1 cm (che nella prima figura vedi più scuro), per poter costruire una scatola ripiegando le strisce laterali.</p> <p>Qual è la capacità della scatola ottenuta ripiegando le strisce laterali?</p>  <p>A. 64 cm^3 B. 90 cm^2 C. 96 cm^2 D. 100 cm^3</p>	<p>Il quesito richiede di ricavare i dati attraverso l'osservazione delle figure e di saper vedere nello spazio.</p> <p>Risponde correttamente il 61,9% degli studenti.</p> <p>Tra le domande dell'ambito Spazio e figure a risposta chiusa, risulta essere la più difficile. Il 16,5% ha calcolato l'area dello sviluppo piano (probabilmente non ha collegato la capacità al volume).</p> <p>Mentre il 14,2 % sembra non essere stato in grado di passare dal piano allo spazio.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007: visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali. Calcolare il volume delle figure tridimensionali più comuni e dare stime di quello degli oggetti della vita quotidiana.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Rappresentazione di oggetti nel piano e nello spazio. Semplici figure dello spazio e del piano (cubo, sfera, triangolo, quadrato...). Aree e volumi dei principali solidi. Rappresentazione piana di figure solide.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (<i>individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,...</i>)</p> <p>COMPITI: Riconoscere le relazioni fra le forme a tre dimensioni e la loro rappresentazione bidimensionale. Sapere selezionare formule appropriate per calcolare perimetro, area, volume di figure geometriche</p>

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D8. Qual è la somma degli angoli a, b, c, d, e, f nella figura disegnata qui sotto?</p>  <p>A. Un angolo piatto, ossia 180° B. Tre angoli retti, ossia 270° C. Due angoli piatti, ossia 360° D. Cinque angoli retti, ossia 450°</p>	<p>Per rispondere i ragazzi avrebbero dovuto conoscere la somma degli angoli interni di un triangolo e sapere che angoli opposti al vertice sono congruenti.</p> <p>Il 71,4% degli studenti ha risposto correttamente C, il 15,4% ha scelto l'opzione B. Probabilmente molti studenti hanno individuato fra le quattro opzioni quella più plausibile.</p> <p>Sarebbe stato interessante richiedere la giustificazione della risposta.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007: conoscere definizioni e proprietà significative delle principali figure piane.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Angoli e loro ampiezza. Proprietà degli angoli: angoli opposti al vertice, somma degli angoli interni di un triangolo e di poligoni.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (<i>oggetti matematici, proprietà, strutture...</i>)</p> <p>COMPITI: Classificare e misurare angoli. Risolvere problemi utilizzando proprietà geometriche.</p>

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D14 Nel disegno vedi un campo da calcetto di forma rettangolare.</p>  <p>Roberto e Elena si sfidano a una gara di corsa: partendo dall'angolo indicato nella figura con A devono arrivare all'angolo B. Roberto corre lungo il bordo del campo, mentre Elena corre lungo la diagonale del campo. Quanti metri in più deve percorrere Roberto?</p> <p>A. 50 B. 70 C. 20 D. 30</p> <p>Scrivi il procedimento che hai seguito:</p> <hr/>	<p>Il quesito richiede di applicare il teorema di Pitagora per individuare la lunghezza del percorso. È richiesto anche il procedimento. Il 72,3% risponde correttamente C, tuttavia solo il 50,6% svolge correttamente il procedimento e il 4% lo omette.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007: riconoscere e risolvere problemi di vario genere analizzando la situazione e traducendola in termini matematici. Conoscere il Teorema di Pitagora e le sue applicazioni in matematica e in situazioni concrete.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Teorema di Pitagora.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (<i>individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,...</i>).</p> <p>COMPITI: Utilizzare il teorema di Pitagora per risolvere problemi.</p>

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D17 Il triangolo ABC viene traslato nel piano cartesiano in modo che il vertice A venga a trovarsi in A'. Quali sono le coordinate B' e C' degli altri vertici del triangolo traslato?</p>  <p>A. $B' \equiv (9;5)$ $C' \equiv (9;3)$ B. $B' \equiv (3;5)$ $C' \equiv (6;3)$ C. $B' \equiv (9;5)$ $C' \equiv (6;7)$ D. $B' \equiv (6;7)$ $C' \equiv (6;3)$</p>	<p>Gli studenti devono individuare, sul piano cartesiano, le coordinate dei punti ottenuti da una traslazione. Potevano anche disegnare la figura traslata sul piano cartesiano e individuare le coordinate dei punti direttamente dal grafico.</p> <p>E' stato risolto correttamente dall'80,7% degli studenti.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curriculum 2007: rappresentare punti, segmenti e figure sul piano cartesiano; riconoscere figure ruotate, traslate e riflesse.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Traslazioni, rotazioni e simmetrie Rappresentazione sul piano cartesiano di figure piane e di trasformazioni geometriche.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (<i>oggetti matematici, proprietà, strutture...</i>).</p> <p>COMPITI: Saper rappresentare figure piane e trasformazioni geometriche nel piano cartesiano.</p>

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D19 Dati due punti A e B sono stati tracciati, con lo stesso raggio maggiore della metà del segmento, due archi di circonferenza, uno con centro in A e uno con centro in B. È stato chiamato C uno dei punti di intersezione tra i due archi.</p> <p>a. Se l'angolo \widehat{ACB} misura 40°, quanto misura l'angolo \widehat{ABC} segnato?</p>  <p>A. 50° B. 60° C. 70° D. 140°</p> <p>b. Scrivi il procedimento che hai seguito:</p>	<p>Il quesito richiede di sapere interpretare le istruzioni di una costruzione geometrica. Viene richiesto anche il procedimento. Il 69,2% risponde correttamente C, mentre solo il 42,3 % indica correttamente il procedimento e il 10,5 lo omette.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007: conoscere definizioni e proprietà significative delle principali figure piane. Riprodurre figure e disegni geometrici in base ad una descrizione e codificazione fatta da altri.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Rappresentazione di oggetti nel piano e nello spazio. Angoli e loro ampiezza.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (<i>verbale, scritta, simbolica, grafica, ...</i>).</p> <p>COMPITI: Classificare e misurare angoli Conoscere gli elementi e le proprietà del cerchio (raggio, diametro, angoli a centro e alla circonferenza, ...).</p>

Domanda			Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI												
<p>D5 La piramide disegnata qui a fianco è un solido formato da 4 triangoli equilateri uguali fra loro e da una base quadrata. Per ciascuno dei seguenti disegni, indica con una crocetta nella tabella sottostante se è uno sviluppo della piramide.</p> 			<p>Lo studente deve passare dal piano allo spazio riconoscendo gli sviluppi corretti. I risultati sono molto buoni per quanto riguarda i primi due disegni (98,1% e 91,7%), mentre il terzo disegno, che è uno sviluppo della piramide non standard, ha una percentuale di risposte corrette pari al 49,2%.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007: rappresentare oggetti e figure tridimensionali in vario modo tramite disegni sul piano; visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Rappresentazione di oggetti nel piano e nello spazio. Composizione e scomposizione di figure. Rappresentazione piana di figure solide.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (<i>individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,...</i>).</p> <p>COMPITI: Riconoscere le relazioni fra le forme a tre dimensioni e la loro rappresentazione bi-dimensionale.</p>												
																
Disegno 1	Disegno 2	Disegno 3														
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Disegno</th> <th>SI</th> <th>NO</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> </tr> </tbody> </table>			Disegno	SI	NO	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
Disegno	SI	NO														
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>														
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>														
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>														

Ambito Relazioni e funzioni

Domande a risposta chiusa

ITALIA						
Ambito di valutazione	Domanda	Mancata risposta	OPZIONI			
			A	B	C	D
Relazioni e funzioni	D4	0,7	3,3	3,0	86,8	6,1
Relazioni e funzioni	D11	0,4	12,9	76,2	9,0	1,5
Relazioni e funzioni	D12	0,2	9,4	84,1	3,8	2,4

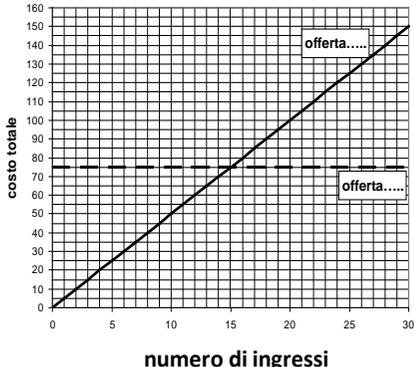
Domande a risposta aperta univoca

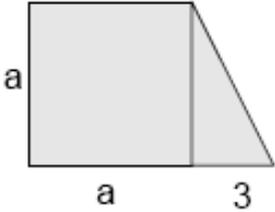
ITALIA				
Ambito di valutazione	Domanda	Mancata risposta	Risposta	Risposta
			Errato	Corretta
Relazioni e funzioni	D6a	4,9	28,1	66,9
	D6b	3,1	18,6	78,2
	D6c	3,1	22,2	74,7
Relazioni e funzioni	D18	9,0	64,3	26,8
Relazioni e funzioni	D21	1,1	20,4	78,4

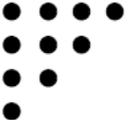
Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D4 Se n è un numero naturale qualsiasi, quale procedimento devi seguire per essere sicuro di ottenere sempre un numero dispari?</p> <p>A. $n - 1$</p> <p>B. $n + 1$</p> <p>C. $n \times 2 + 1$</p> <p>D. $\frac{n}{2} + 1$</p>	<p>Il quesito richiede di individuare una formula per ottenere un numero dispari a partire da un numero naturale qualsiasi.</p> <p>È stato risolto correttamente dall'86,8% degli studenti, segno che la scrittura algebrica dei numeri dispari è nota agli studenti.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007: costruire, interpretare e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Classificazione di oggetti, figure, numeri in base a una determinata proprietà. Rappresentazione di fatti e fenomeni attraverso tabelle, grafici ed espressioni algebriche.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico...).</p> <p>COMPITI: Costruire, leggere e interpretare formule. Generalizzare relazioni in una sequenza numerica utilizzando parole e lettere.</p>

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D11. Nel risolvere l'equazione scritta alla riga 1, è stato commesso un errore.</p> <p>$-10x - 2 + 4x - 4 = 0$ (1)</p> <p>$-10x + 4x = 2 + 4$ (2)</p> <p>$6x = 6$ (3)</p> <p>$x = \frac{6}{6}$ (4)</p> <p>$x = 1$ (5)</p> <p>In quale passaggio è stato commesso l'errore?</p> <p>A. Nel passaggio dalla riga 1 alla riga 2.</p> <p>B. Nel passaggio dalla riga 2 alla riga 3.</p> <p>C. Nel passaggio dalla riga 3 alla riga 4.</p> <p>D. Nel passaggio dalla riga 4 alla riga 5.</p>	<p>Si richiede di individuare l'errore in un'equazione già risolta.</p> <p>È risolta correttamente dal 76,2% dei ragazzi.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007: esplorare e risolvere problemi utilizzando equazioni di primo grado.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Equazioni di primo grado.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico...).</p> <p>COMPITI: Risolvere semplici equazioni di I grado.</p>

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI																				
<p>D12. Un ragazzo prepara la limonata utilizzando questa ricetta:</p> <table border="1" data-bbox="190 296 792 368"> <tr> <td>Dosi per 4 persone</td> <td>1 litro di acqua</td> <td>30 g di zucchero</td> <td>4 limoni</td> </tr> </table> <p>Quali dosi deve utilizzare per preparare la limonata per 6 persone?</p> <p>A.</p> <table border="1" data-bbox="217 442 792 513"> <tr> <td>Dosi per 6 persone</td> <td>2 litri di acqua</td> <td>60 g di zucchero</td> <td>6 limoni</td> </tr> </table> <p>B.</p> <table border="1" data-bbox="217 553 792 625"> <tr> <td>Dosi per 6 persone</td> <td>1,5 litri di acqua</td> <td>45 g di zucchero</td> <td>6 limoni</td> </tr> </table> <p>C.</p> <table border="1" data-bbox="217 665 792 737"> <tr> <td>Dosi per 6 persone</td> <td>1,5 litri di acqua</td> <td>60 g di zucchero</td> <td>8 limoni</td> </tr> </table> <p>D.</p> <table border="1" data-bbox="217 777 792 849"> <tr> <td>Dosi per 6 persone</td> <td>2 litri di acqua</td> <td>45 g di zucchero</td> <td>8 limoni</td> </tr> </table>	Dosi per 4 persone	1 litro di acqua	30 g di zucchero	4 limoni	Dosi per 6 persone	2 litri di acqua	60 g di zucchero	6 limoni	Dosi per 6 persone	1,5 litri di acqua	45 g di zucchero	6 limoni	Dosi per 6 persone	1,5 litri di acqua	60 g di zucchero	8 limoni	Dosi per 6 persone	2 litri di acqua	45 g di zucchero	8 limoni	<p>Si trattava di individuare la proporzione corretta fra gli ingredienti. È stata risolta correttamente dall'84,1% degli studenti.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007: rappresentare problemi con tabelle e grafici che ne esprimano la struttura; esprimere la relazione di proporzionalità con un'uguaglianza di frazioni e viceversa.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Grandezze direttamente e inversamente proporzionali. Rappresentazione di fatti e fenomeni attraverso tabelle, grafici ed espressioni algebriche.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (<i>individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,...</i>).</p> <p>COMPITI: Riconoscere grandezze direttamente e inversamente proporzionali.</p>
Dosi per 4 persone	1 litro di acqua	30 g di zucchero	4 limoni																			
Dosi per 6 persone	2 litri di acqua	60 g di zucchero	6 limoni																			
Dosi per 6 persone	1,5 litri di acqua	45 g di zucchero	6 limoni																			
Dosi per 6 persone	1,5 litri di acqua	60 g di zucchero	8 limoni																			
Dosi per 6 persone	2 litri di acqua	45 g di zucchero	8 limoni																			

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D6 La piscina <i>ACQUADOLCE</i> offre ai suoi frequentatori due diverse modalità di pagamento: è possibile fare un abbonamento mensile, che costa 75 euro (offerta A), oppure pagare un biglietto di 5 euro per ogni ingresso (offerta B).</p> <p style="text-align: center;">Offerte piscina ACQUADOLCE</p>  <p style="text-align: center;">numero di ingressi</p> <p>a. Scrivi nelle caselle del grafico quale retta descrive l'offerta A e quale l'offerta B.</p> <p>b. Con quanti ingressi in un mese le due offerte si equivalgono? _____</p> <p>c. Se in un mese si utilizza la piscina 20 volte, quanto si risparmia facendo l'abbonamento mensile? _____</p>	<p>Lo studente, nella domanda a, deve mettere in relazione rappresentazioni diverse di una stessa situazione: grafico e linguaggio naturale.</p> <p>Nella domanda b lo studente deve individuare il punto di intersezione delle due rette come equivalenza delle due offerte.</p> <p>Nella domanda c invece lo studente dovrebbe leggere e interpretare il grafico.</p> <p>Risponde correttamente alla domanda a il 66,9% degli studenti, alla b il 78,2% e alla c il 74,7%.</p> <p>Il risultato sembra anomalo in quanto la domanda c sembra la più complessa in termini di lettura del grafico. Probabilmente gli studenti, in virtù del fatto che i numeri in gioco erano semplici, hanno fatto il calcolo per rispondere alle domande b e c, indipendentemente da quanto avevano risposto in a, che è così risultata la domanda più complessa.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007: usare il piano cartesiano per rappresentare relazioni e funzioni e per conoscere, in particolare, le funzioni del tipo: $y=ax, \dots$; rappresentare relazioni e dati e, in situazioni significative, utilizzare le rappresentazioni per ricavare informazioni, formulare giudizi e prendere decisioni.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Funzioni del tipo $y=ax$, $y=a/x$ e $y=x^2$ e loro rappresentazione grafica. Rappresentazione di funzioni attraverso parole, tabelle, grafici, espressioni algebriche. Rappresentazione di fatti e fenomeni attraverso tabelle, grafici ed espressioni algebriche.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (<i>verbale, scritta, simbolica, grafica, ...</i>).</p> <p>Saper risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (<i>individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,...</i>).</p> <p>COMPITI: Saper confrontare rappresentazioni diverse (tabelle, grafici, formule) di una funzione. Identificare un grafico o una formula che esprime relazioni fra grandezze in fatti e fenomeni.</p>

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D18. Scrivi la formula che esprime come varia l'area A della figura qui di fianco, al variare della lunghezza a.</p>  <p>$A =$ _____</p>	<p>Il quesito richiede di individuare una formula relativa all'area A di una figura piana utilizzando la variabile a. Nella pratica didattica non è usuale che ai ragazzi sia chiesto di individuare una formula a partire da una variabile data. I risultati confermano questa impressione in quanto solo il 26,8% risponde correttamente. Questo fatto dovrebbe fare riflettere i docenti sul modo col quale nella scuola media si propone l'approccio all'algebra. Non è tanto importante il calcolo algebrico in quanto tale, ma lavorare sui significati di variabile anche legati a contesti noti ai ragazzi come in questo caso.</p> <p>Per gli studenti le lettere nelle formule di geometria, come ad esempio $A = bxh$, non rappresentano delle variabili ma sono semplicemente delle <i>etichette</i>, iniziali di area, base,</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007: costruire, interpretare e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Rappresentazione di funzioni attraverso parole, tabelle, grafici, espressioni algebriche.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (<i>verbale, scritta, simbolica, grafica, ...</i>).</p> <p>COMPITI: Costruire, leggere e interpretare formule.</p>

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D21 Osserva come sono disposti i punti nelle seguenti figure.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;"> <p>Figura 1</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>Figura 2</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>Figura 3</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>Figura 4</p>  </div> </div> <p>Se si continua nello stesso modo la sequenza delle figure, quanti punti avrà la Figura 8? Scrivi la tua risposta: _____</p>	<p>Lo studente deve individuare una regolarità (numeri triangolari).</p> <p>La domanda non ha presentato problemi in quanto il 78,4% degli studenti ha risposto correttamente.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007: riconoscere e descrivere regolarità in una sequenza di numeri o di figure.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Ricerca di regolarità in sequenze di numeri, figure, simboli e parole. Generalizzazione di regolarità attraverso parole e espressioni algebriche.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (<i>congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, ...</i>).</p> <p>COMPITI: Generalizzare relazioni in una sequenza numerica utilizzando parole e lettere.</p>

Ambito Numeri

Domande a risposta chiusa

ITALIA						
Ambito di valutazione	Domanda	Mancata risposta	OPZIONI			
			A	B	C	D
Numeri	D2	0,1	13,3	2,2	3,1	81,3
Numeri	D10	1,4	9,5	9,7	73,4	6,0
Numeri	D15	1,2	73,4	7,0	12,2	6,2
Numeri	D16	1,3	3,9	12,3	71,9	10,5

Domande a risposta aperta univoca

ITALIA				
Ambito di valutazione	Domanda	Mancata risposta	Risposta Errata	Risposta Corretta
Numeri	D7	4,0	17,9	78,0

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D2. Quanto vale la potenza $(-4)^2$?</p> <p>A. - 16</p> <p>B. - 8</p> <p>C. 8</p> <p>D. 16</p>	<p>Lo studente deve conoscere una semplice regola delle potenze e applicarla correttamente. È stata risolta correttamente dall'81,3% degli studenti.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007: utilizzare la notazione usuale per le potenze con esponente intero positivo, consapevoli del significato; eseguire semplici espressioni di calcolo con i numeri conosciuti, essendo consapevoli del significato delle parentesi e delle convenzioni sulla precedenza delle operazioni.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Potenze di numeri naturali e interi.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico...).</p> <p>COMPITI: Saper elevare a potenza numeri naturali, numeri interi e frazioni. Conoscere le proprietà delle potenze.</p>

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D10 In una scuola con 300 allievi, 45 tifano per la squadra del Borgorosso. Quale delle seguenti affermazioni è vera?</p> <p>A. Un ragazzo su 6 è tifoso del Borgorosso.</p> <p>B. I tifosi del Borgorosso sono il 25% degli allievi.</p> <p>C. I tifosi del Borgorosso sono il 15% degli allievi.</p> <p>D. Un quinto degli allievi è tifoso del Borgorosso.</p>	<p>Lo studente deve saper collegare rappresentazioni diverse nell'ambito Numeri: linguaggio naturale (un ragazzo su 6...), percentuali e frazioni. È stata risolta correttamente dal 73,4% degli studenti, ma entrambe le opzioni a e b hanno avuto percentuali di risposta intorno al 10%.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007: utilizzare numeri decimali, frazioni e percentuali per descrivere situazioni quotidiane.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Rapporti, percentuali e proporzioni.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica, ...).</p> <p>COMPITI: Conoscere la frazione come rapporto e come quoziente di numeri interi. Saper passare da una frazione ad una percentuale o al numero decimale e viceversa.</p>

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D15. Un club sportivo ha 150 atleti e ogni iscritto pratica un solo sport: il tennis, la scherma o l'atletica leggera. $\frac{2}{5}$ degli atleti praticano il tennis e $\frac{1}{3}$ la scherma. Quanti sono quelli che si dedicano all'atletica?</p> <p>A. 40 B. 50 C. 60 D. 70</p>	<p>Un quesito sulla frazione come operatore: di routine nella scuola media.</p> <p>È stato risolto correttamente dal 73,4% degli studenti. L'opzione c ha avuto il 12,2%.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007: utilizzare numeri decimali, frazioni e percentuali per descrivere situazioni quotidiane.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Numeri decimali e frazioni. Frazioni equivalenti.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico...).</p> <p>COMPITI: Conoscere la frazione come rapporto e come quoziente di numeri interi.</p>

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D16. Confronta il numero 3,25 con le coppie di numeri elencate sotto. In una di esse 3,25 è maggiore del primo numero e minore del secondo. In quale?</p> <p>A. 2 e 3</p> <p>B. $\frac{7}{2}$ e $\frac{15}{4}$</p> <p>C. 3 e $\frac{7}{2}$</p> <p>D. $\frac{15}{4}$ e 4</p>	<p>In questo quesito si tratta di confrontare decimali e frazioni. È stato risolto dal 71,9% degli studenti.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curriculum 2007: rappresentare i numeri conosciuti sulla retta.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Numeri decimali e frazioni. Frazioni equivalenti.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico...).</p> <p>COMPITI: Saper collocare su una retta numerica numeri decimali e frazioni.</p>

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D7. Scrivi al posto dei puntini il numero che rende vera la seguente uguaglianza:</p> $4 \times \dots = 1,6$	<p>Il quesito richiede di conoscere i numeri decimali e sapere lavorare con essi. È stato risolto correttamente dal 78% degli studenti.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curriculum 2007: dare stime per il risultato di un'operazione.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Operazioni fra numeri decimali.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture...).</p> <p>COMPITI: Effettuare calcoli con numeri decimali.</p>

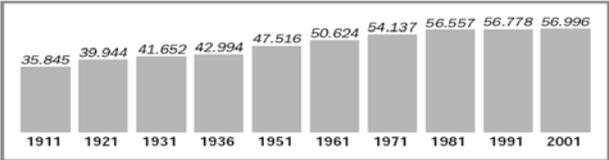
Ambito Misure, dati e previsioni

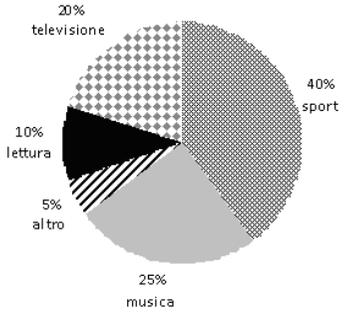
Domande a risposta chiusa

ITALIA						
Ambito di valutazione	Domanda	Mancata risposta	OPZIONI			
			A	B	C	D
Misure, dati e previsioni	D1	0,5	3,3	8,3	83,8	4,1
Misure, dati e previsioni	D9	1,1	8,5	18,3	6,4	65,8
Misure, dati e previsioni	D13	0,9	3,9	8,4	73,7	13,1
Misure, dati e previsioni	D20	1,9	13,6	65,0	7,1	12,5

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D1. Qual è l'unità di misura più appropriata per esprimere il peso di un uovo di gallina?</p> <p>A. milligrammi B. decigrammi C. grammi D. ettogrammi</p>	<p>Lo studente deve stimare il peso individuando l'unità di misura più appropriata. È stato risolto correttamente dall'83,8% degli studenti.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curriculum 2007: conoscere le principali unità di misura [...] e usarle per effettuare misure e stime.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Unità di misura.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Sapere riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura (<i>saper individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, saper stimare una misura,...</i>).</p> <p>COMPITI: Saper stimare l'ordine di grandezza in una misura.</p>

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D9 Un insieme di dati è costituito dai seguenti quattro valori: 20 ; 30 ; 50 ; 60 A questi dati ne viene aggiunto un altro e si calcola la media aritmetica dei cinque valori, che risulta essere 50. Qual è il valore del dato aggiunto?</p> <p>A. 10 B. 40 C. 50 D. 90</p>	<p>Il quesito chiede di individuare un dato mancante conoscendo la media aritmetica. È stato risolto correttamente solo dal 65,8% degli studenti. Il 18,3% ha scelto l'opzione B come se il dato mancante fosse quello della sequenza numerica.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curriculum 2007: usare le nozioni di media aritmetica e di frequenza.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Moda, mediana e media aritmetica.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (<i>individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,...</i>).</p> <p>COMPITI: Usare e interpretare insieme di dati per rispondere a domande e risolvere problemi (<i>trarre conclusioni, fare previsioni, stimare valori tra punti dati, ...</i>).</p>

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI																						
<p>D13. Il seguente grafico rappresenta la popolazione residente in Italia (espressa in migliaia) nei censimenti dal 1911 al 2001:</p> <p><i>Censimenti 1911-2001, migliaia di persone</i></p>  <table border="1" data-bbox="206 448 815 608"> <thead> <tr> <th>Anno</th> <th>Popolazione (migliaia)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1911</td><td>35.845</td></tr> <tr><td>1921</td><td>39.944</td></tr> <tr><td>1931</td><td>41.652</td></tr> <tr><td>1936</td><td>42.994</td></tr> <tr><td>1951</td><td>47.516</td></tr> <tr><td>1961</td><td>50.624</td></tr> <tr><td>1971</td><td>54.137</td></tr> <tr><td>1981</td><td>56.557</td></tr> <tr><td>1991</td><td>56.778</td></tr> <tr><td>2001</td><td>56.996</td></tr> </tbody> </table> <p>Fonte: Istat</p> <p>Quale delle seguenti affermazioni è vera?</p> <ul style="list-style-type: none"> A. I censimenti sono stati attuati regolarmente ogni dieci anni. B. La popolazione è rimasta invariata negli ultimi tre censimenti. C. La popolazione nel decennio 1911–1921 è aumentata di circa quattro milioni di persone. D. Dal 1936 al 1951 la popolazione è aumentata di più di 5 milioni di persone. 	Anno	Popolazione (migliaia)	1911	35.845	1921	39.944	1931	41.652	1936	42.994	1951	47.516	1961	50.624	1971	54.137	1981	56.557	1991	56.778	2001	56.996	<p>Si tratta di lettura e interpretazione di un grafico.</p> <p>Gli studenti hanno risposto correttamente nel 73,7% dei casi.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007: sapere utilizzare rappresentazioni di dati in situazioni adeguate per ricavare informazioni.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Il collettivo statistico e i suoi elementi. Prime rappresentazioni di dati (tabelle, pittogrammi, grafici a barre, ecc.).</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (<i>descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...</i>).</p> <p>COMPITI: Usare e interpretare insieme di dati per rispondere a domande e risolvere problemi (trarre conclusioni, fare previsioni, stimare valori tra punti dati, ...).</p>
Anno	Popolazione (migliaia)																							
1911	35.845																							
1921	39.944																							
1931	41.652																							
1936	42.994																							
1951	47.516																							
1961	50.624																							
1971	54.137																							
1981	56.557																							
1991	56.778																							
2001	56.996																							

Domanda	Commento	Quadro di Riferimento delle prove INVALSI
<p>D20 Un'indagine sull'attività preferita nel tempo libero, compiuta su un campione di 220 studenti di una scuola con 700 studenti in totale, ha dato i risultati rappresentati nel grafico.</p>  <p>Qual è la probabilità che estraendo a caso uno studente del campione si ottenga un alunno che dedica il tempo libero alla lettura?</p> <p>A. $\frac{1}{220}$</p> <p>B. $\frac{1}{10}$</p> <p>C. $\frac{1}{5}$</p> <p>D. $\frac{1}{70}$</p>	<p>Il quesito unisce conoscenze di statistica e conoscenze di probabilità: si tratta di individuare la probabilità di un evento a partire da dati statistici.</p> <p>Tra i quesiti dell'ambito è quello con risultati peggiori: 65% di risposte corrette. Il 13,6% ha scelto l'opzione A, facendo unicamente riferimento alla definizione classica di probabilità; il 12,5% ha scelto l'opzione D, anche in questo caso hanno fatto riferimento unicamente alla definizione classica (10 su 700). Queste scelte mettono in luce la difficoltà ad individuare lo spazio degli eventi.</p> <p><i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007 : rappresentare insiemi di dati. In situazioni significative, confrontare dati al fine di prendere decisioni, utilizzando le distribuzioni delle frequenze; in semplici situazioni aleatorie calcolare la probabilità di qualche evento.</i></p>	<p>OGGETTI DI VALUTAZIONE: Semplici valutazioni di probabilità di un evento a partire da dati statistici.</p> <p>PROCESSI COGNITIVI: Sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (<i>individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,...</i>).</p> <p>Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (<i>verbale, scritta, simbolica, grafica, ...</i>).</p> <p>COMPITI: Usare dati sperimentali per prevedere la probabilità di eventi futuri.</p>

Alcune considerazioni finali

- I buoni risultati nell'ambito **Numeri** potrebbero essere spiegati dal fatto che i numeri in gioco erano abbastanza semplici in quanto non era consentito l'uso di strumenti di calcolo. Dal momento che già tra i "Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria" si trova: *si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale e sa valutare l'opportunità di ricorrere ad una calcolatrice* e che l'uso di strumenti di calcolo è abbastanza diffuso nella scuola secondaria di primo grado, potrebbe essere opportuno consentirne l'uso e proporre quesiti con numeri "meno facili" allo scopo di valutare questo tipo di competenza. Anche in altri ambiti, ad esempio nel quesito D6 (Relazioni e funzioni), il calcolo diretto risultava più immediato che non l'analisi e la lettura del grafico, che era il vero obiettivo del quesito.
- Le due domande (D14 e D15), nelle quali era richiesto di "scrivere il procedimento", mettono in luce una difficoltà degli studenti di fronte a queste richieste, evidenziata anche nelle ricerche internazionali (TIMSS e PISA). Già nei "Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria" si trova: *Riesce a risolvere facili problemi mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo sia sui risultati e spiegando a parole il procedimento seguito*, mentre al termine della scuola secondaria di primo grado lo studente: *ha consolidato le conoscenze teoriche acquisite e sa argomentare [...], è capace di sostenere le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e argomentando attraverso concatenazioni di affermazioni*. Pertanto potrebbe essere opportuno avere un numero maggiore di domande nelle quali si chiede di scrivere il procedimento seguito e altre nelle quali gli studenti debbano giustificare con argomentazioni opportune le proprie risposte.
- Quesiti in cui si richiede di *conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica, ...)* (vedi Quadro di riferimento di Matematica delle prove Nazionali) dovrebbero essere ben rappresentati anche in contesti ricchi e complessi in quanto mettono in luce la capacità di gestire registri di rappresentazioni diverse.