SSIS Veneto *Corsi Abilitanti Speciali*
comma 7 art. 3 del D.M. 85/05

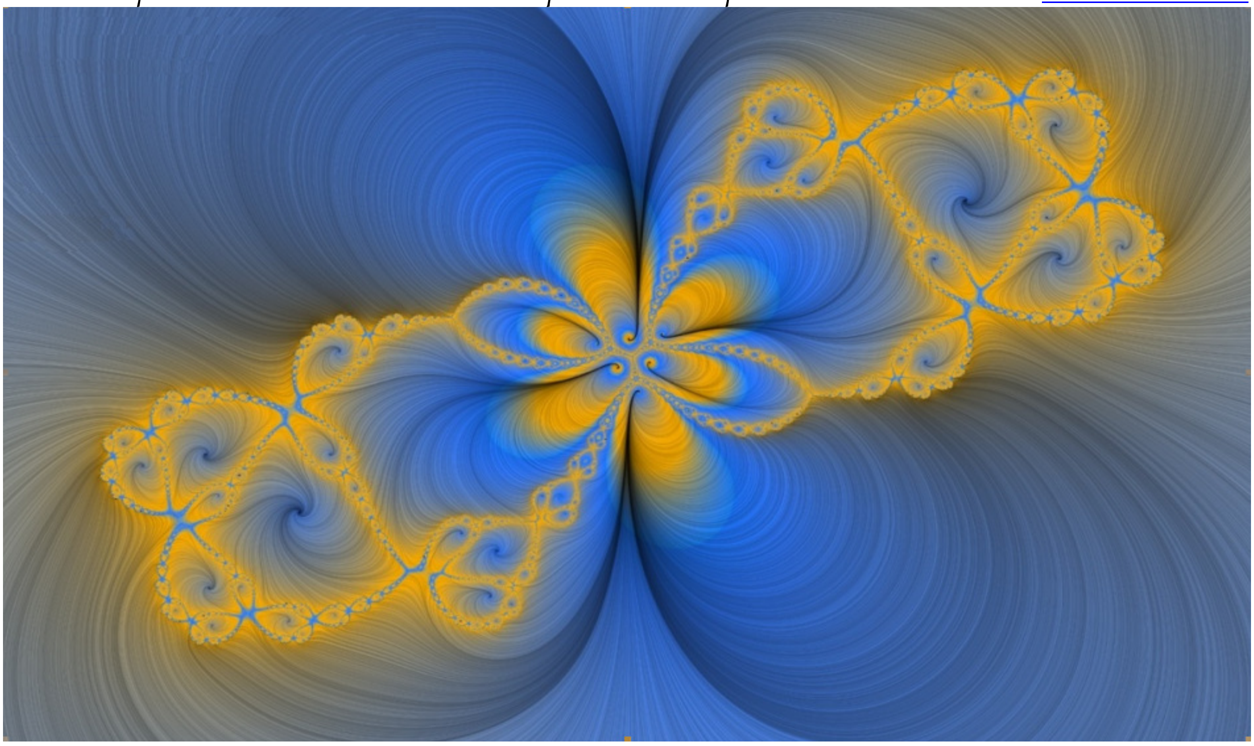
Indirizzo FIM - A047 Matematica
a.a. 2006 /2007

Relazione finale di

Francesca BREA
Matricola R10046

Il linguaggio per "fare" Matematica

"Se qualcuno non riesce a capire quanto sia semplice la matematica,
è soltanto perché non si rende ben conto di quanto sia complicata la vita" John von Neumann



Il linguaggio per "fare" Matematica

Indice

In copertina: **FRATTALI** *(….., logica, informatica, geometria, numeri complessi, arte, musica…..)*

Sommario

L'esigenza di un linguaggio formale pone il problema di *cosa e come* insegnare in una prima liceo scientifico di insiemistica e logica, seguendo le indicazioni ministeriali sui nuclei fondanti nei nuovi curricoli.

L'attenzione viene posta sulla ***valutazione*** delle competenze acquisite e sull'efficacia delle scelte effettuate.

Una scienza nata per contare le pecore ......
e che ora ci porta ai confini dell'Universo

Introduzione

Matematica significa: "incline ad apprendere", ma purtroppo per gli alunni di oggi non è sempre così. Come affermano in una interessante intervista[YouTube] di marzo 2007 Odifreddi e Girello mentre cercano di spiegarci perchè gli orientali vanno bene in matematica, l'attitudine si sviluppa verso i 13-14 anni, ed è soprattutto in questa età che si acquisiscono i concetti matematici, attivando gli opportuni circuiti cerebrali di cui l'essere umano già dispone mediante le esperienze precedenti.

Non si dovrebbe "*imporre una matematica dall'esterno, ma fare evolvere dall'interno la matematica che vive nel nostro corpo*"[UMI]. Quando si insegna matematica si dovrebbe trattare come un'impresa naturale, umana, tenendo conto dell'esistenza nel nostro essere (o meglio nell'essere dell'alunno), della causa di situazioni che possono essere fonte di errori e di misconcezioni.

La matematica però usa un linguaggio diverso da quello comune, con una propria struttura fatta di termini, segni, concetti di base, simboli con procedure ed abilità necessarie per eseguire determinate operazioni; lo scopo del docente è quello di far "imparare a usare tali elementi per risolvere problemi non familiari in una molteplicità di situazioni definite in termini di funzioni sociali"[PISA]

La matematica risulta essere molto utile nelle scienze, ma ciò non toglie che essa sia prima di tutto un linguaggio; a questo punto si pone il problema di quanto sia importante fornire solide basi di logica e insiemistica all'inizio del corso di studi della scuola media superiore (ammesso che questo non sia già avvenuto, e sarebbe auspicabile, nei cicli scolastici precedenti).

Quest'anno, in vari corsi, ci è stato detto che i problemi che ha avuto l'evoluzione della matematica nel corso dei secoli potrebbero essere gli stessi che ritroviamo poi nei nostri alunni; quindi i metodi e le soluzioni che sono state trovate dai grandi scienziati e che si sono consolidate nel tempo, sono le migliori, sono quelle su cui oggi possiamo fare affidamento per sviluppare una buona conoscenza e competenza di base negli studenti in modo che possano acquisire le corrette abilità per l'inserimento nella società, nel lavoro e nella prosecuzione degli studi, nonché per poter utilizzare tali competenze nelle discipline che necessitano della matematica per poter esistere: informatica, fisica, chimica, elettronica, economia, ecc….

In base a questa riflessione ritengo di poter considerare fondamentali lo studio della teoria degli insiemi e della logica per abituare progressivamente gli studenti all'uso di un rigoroso linguaggio formale matematico; all'inizio si farà un uso poco più che stenografico dei simboli della logica per passare ad "introdurlo solo quando se ne sente l'esigenza", per esempio con l'introduzione dell'informatica che utilizza "*un sistema simbolico su cui operare meccanicamente in corrispondenza delle operazioni sui significati che si vogliono controllare o elaborare. Così le operazioni puramente sintattiche sul simbolismo possono essere eseguite anche da una macchina che sarà utile*

[YouTube] **http://www.youtube.com/watch?v=WPzHZtA7P7I**
[UMI] Matematica per il cittadino, premessa
[PISA] Valutare le competenze in scienze, lettura e matematica. Quadro di riferimento di PISA 2006 (2007)

all'uomo che conosce la corrispondenza tra le operazioni sintattiche e le operazioni sui significati delle formule" [Ferro]

Per quanto questo discorso sia valido in tutti i bienni è da considerare che in talune scuole è necessario prima di tutto motivare gli studenti e portarli ad amare, o per lo meno a non odiare, la matematica.

Nel progetto OCSE PISA (Programme for International Student Assessment), che è una rilevazione internazionale delle conoscenze, competenze e abilità indicate col termine literacy (vedi allegato 7) degli studenti quindicenni; si dice che "*La literacy matematica è esercitata e attivata da chi possiede un minimo di fiducia in se stesso, di curiosità, di percezione dell'interesse e dell'importanza della matematica e di desiderio di fare o di capire.*"[Literacy]; soprattutto tutto questo è necessario in un liceo o in un istituto tecnico per sviluppare l'abitudine alla matematizzazione ed all'uso di "linguaggi rigorosi" in preparazione all'uso futuro di linguaggi formali.

Riprendendo spunto dalla storia ricordo come "*la teoria degli insiemi fu il culmine ottocentesco della concezione riduzionista della matematica, che attraverso l'analisi logica ridusse appunto la geometria all'analisi, l'analisi all'aritmetica e l'aritmetica alla logica*" [Odifreddi]

In questa relazione affronterò il problema di "cosa" e "come" introdurre in insiemistica e logica in una classe prima liceo scientifico; partirò dall'esame degli errori e delle capacità acquisite da alunni a cui ho insegnato negli anni precedenti; affronterò e cercherò di risolvere il problema di "come valutare" al meglio le conoscenze e le competenze apprese da due classi in cui insegno quest'anno.

Mi limiterò a considerazioni di metaverifica, relative solo ad un segmento di unità didattica per ragioni di spazio, ma ritengo interessante, per un quadro globale, la consultazione del Quadro di riferimento di PISA 2006 in cui viene affrontato "il problema pratico di come valutare se gli studenti di 15 anni siano *competenti* sotto il profilo matematico *in termini di capacità di matematizzare*" [PISA].

In questa relazione

⇒ affronto il problema della rilevazione delle competenze ed abilità acquisite ad una mia alunna del precedente anno scolastico individuando le criticità nella sua preparazione di base.

⇒ descrivo l'attività che ho finora svolto in due classi prime, indicando la scelta di una parte di un'unità didattica impostata per l'apprendimento del linguaggio insiemistico e logico per porre solide basi per la prosecuzione degli studi in un liceo scientifico.

⇒ descrivo il metodo di valutazione utilizzato durante il secondo project work (abbiamo analizzato un metodo di valutazione delle conoscenze e competenze mediante verifiche scritte applicato a discipline diverse ed a classi totalmente diverse. Vedi Allegato)

[Ferro] L'apprendimento della matematica fra 13 e 16 anni" PADOVA, 14/02/02 Ruggero Ferro.
http://www.irre.veneto.it/sito_irrev/matematica/linguaggio_formale.pdf

[Literacy] La literacy matematica. Quadro di riferimento di PISA 2006. da Pag. 86
http://www.invalsi.it/ric-int/Pisa2006/sito/docs/Quadro_riferimento_PISA2006.pdf

[Odifreddi] La matematica del novecento. Piergiorgio Odifreddi

[PISA] Valutare le competenze in scienze, lettura e matematica. Quadro di riferimento di PISA 2006 (2007)

⇒ metavalutazione: analisi del metodo di valutazione delle due verifiche (normale e di recupero ove necessaria) applicato a tale U.D. ed analisi delle scelte didattiche effettuate (efficacia in relazione agli obiettivi che mi ero riproposta).

Le griglie di valutazione sperimentate con il secondo project work

In conclusione del secondo lavoro di gruppo del project work abbiamo evidenziato che il metodo di valutazione da noi adottato ha i seguenti vantaggi:

- l'alunno, mediante le tabelle dei descrittori ed i punteggi di valutazione attribuiti per ogni esercizio, sia assoluti che in relazione al peso di ogni quesito, ha potuto *analizzare* la verifica svolta, evidenziare le competenze non acquisite e comprendere quanto gli errori fatti o gli esercizi non svolti, hanno inciso sul voto finale che comunque è stato accettato e compreso dalla maggior parte degli alunni.
- l'insegnante ha potuto beneficiare di un sistema **efficace** ed **oggettivo** per l'attribuzione del voto di verifiche scritte: maggiore velocità di correzione e migliore precisione nel valutare errori simili in compiti diversi.
- l'insegnante ha una visione globale della classe, utile per capire se gli obiettivi didattici per cui la prova era stata proposta sono stati raggiunti. Mediante l'uso di semplici statistiche si possono analizzare gli errori individuando gli esercizi che hanno creato più difficoltà allo scopo di migliorare in futuro sia la spiegazione degli argomenti (insistendo sugli esercizi maggiormente non svolti o causa di errori), sia la preparazione delle prove di verifica e, se necessario, modificare i pesi attribuiti. Con queste informazioni si può impostare la propria azione didattica sugli alunni in maniera più significativa e produttiva.

La correzione è un'importante occasione di apprendimento

"*La valutazione, quando è parte integrante dell'educazione matematica, contribuisce significativamente al suo apprendimento. La valutazione dovrebbe informare e guidare gli insegnanti al momento di prendere decisioni sull'insegnamento. Le verifiche che l'insegnante predispone dovrebbero dare informazioni agli studenti sulle conoscenze e sulle abilità matematiche che vengono valutate. Il feedback che gli studenti ricevono dalla valutazione dei loro compiti deve aiutarli a capire gli obiettivi che devono perseguire, e spronarli ad assumersi le proprie responsabilità per migliorare e acquisire maggiore autonomia*"[indire].

Non è però sufficiente per l'alunno un commento più o meno lungo fatto dal docente a fianco dell'errore sulla prova scritta e con l'attribuzione del punteggio (con e senza peso); spesso è necessaria una spiegazione individualizzata delle singole problematiche, utile anche all'insegnante per capire cosa ha generato l'errore; per prevenirlo in futuro o per modificare, in fase di recupero, le spiegazioni ed evidenziare ed eliminare gli apprendimenti scorretti; in alcune classi numerose è quasi impossibile effettuare una efficace correzione alla lavagna, per motivi di disciplina: gli alunni che

[indire] http://ospitiweb.indire.it/adi/MatematicaNuclei/Mnf_340_6principi.htm

hanno fatto bene si annoiano e si distraggono, chi ha fatto male, non è abbastanza motivato a sforzarsi per capire, a volte per mancanza di basi, a volte per mancanza di volizione (specialmente nelle scuole professionali i ragazzi hanno la tendenza ad impegnarsi solo <u>subito prima</u> di una verifica con voto).

Una spiegazione **individuale** degli errori ha spesso quindi una valenza formativa maggiore; il problema che ne deriva è che, in classi numerose, in 50-55 minuti se l'insegnante dedica alcuni minuti per ogni alunno non si riesce a parlare con tutti, ma solo con chi presenta i problemi maggiori.

Oggettività e uniformità delle griglie

Un altro problema che ho avuto in alcune classi è dato dal fatto che alcuni alunni chiedono di alzare il voto e non sempre sono i peggiori, anzi spesso è chi maggiormente è consapevole (anche troppo a volte!!!) delle proprie capacità che ritiene non corretto il punteggio attribuitogli.

Per risolvere questo problema le griglie del project work sono molto utili in quanto permettono all'insegnante di confrontare esercizi simili (gli alunni fanno spesso confronti che in effetti il docente può non riscontrare quando corregge, perché spesso su 26-28 verifiche le prime sono corrette in tempi e modi diversi dalle ultime, ed anche riprendendole in mano tutte alla fine qualcosa può sfuggire).

Un errore "significativo" nello studio di funzioni

Per una corretta metavalutazione dell'efficacia del processo insegnamento-apprendimento è necessario capire quanto la mancanza dei prerequisiti abbia influito sugli errori fatti dalla classe; questo argomento è stato trattato durante il secondo project work per la classe IV geometri sullo studio di funzioni i cui prerequisiti sono dati dagli argomenti che normalmente vengono appresi nei primi tre anni di superiori.

Un caso molto particolare, invece, mi è capitato al serale del corso geometri dove ho insegnato per due anni consecutivi; in quarta avevo un'alunna, di almeno trent'anni, che non seguiva le ore di matematica perché esonerata in quanto già in possesso del diploma di liceo linguistico conseguito circa 10 anni prima (dopo comunque aver cambiato corso di studi alla fine della terza); era stata, quindi, ammessa direttamente in terza geometri serale, ma seguiva solo le materie che non aveva frequentato al liceo linguistico; in quinta ha dovuto studiare anche matematica in quanto all'esame finale sono valutate tutte le materie dell'ultimo anno del corso di studi.

Nel programma di V ho approfondito lo studio di funzioni effettuato già in IV ed ho inserito il modulo sul calcolo di aree. L'alunna in questione è stata quasi sempre assente, anche alle verifiche intermedie e di fine modulo, (bisogna considerare che c'erano solo due ore settimanali consecutive). Negli ultimi mesi di scuola la studentessa si è ritrovata a dover recuperare quasi tutti i moduli in pressoché tutte le materie. Di matematica sosteneva di sapere tutto e che le sarebbe bastato un veloce ripasso.

Per dare una valutazione sommativa per la certificazione del raggiungimento degli obiettivi finali (in particolare del modulo dello studio di funzione) ho dovuto tenere conto di molti fattori: il curricolo precedente, il titolo di studio da conseguire, il fatto che la materia non sarebbe stata richiesta all'esame né scritta né, probabilmente, orale, l'impatto che una valutazione negativa avrebbe avuto sull'esito finale del corso di studi e di una possibile bocciatura.

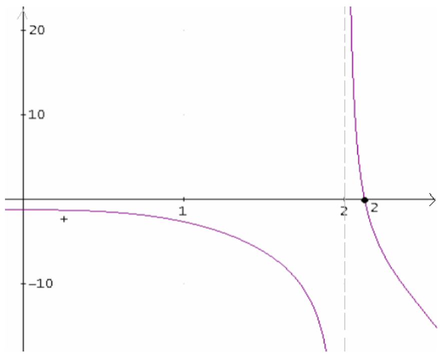
La studentessa riuscì a terminare tutto lo "studio", facendo molti errori gravi nella risoluzione delle disequazioni e dei limiti, dimostrando di conoscere il procedimento (*sapere*), ma di non avere abilità di base necessarie per la risoluzione delle singole parti e le capacità di trarre da esse le giuste informazioni (*saper fare*). Nel suo elaborato non avrebbe dovuto nemmeno proporre il grafico della funzione in quanto molti elementi erano in totale contraddizione tra loro.

Quell'alunna invece tracciò un grafico con evidenti assurdità, che facevano intuire la mancanza di comprensione e di un minimo di buon senso su ciò che cercava di ottenere.

Considerando che tale alunna stava per conseguire un diploma di geometra ho ritenuto che, dal punto di vista della matematica, gli obiettivi finali non fossero stati raggiunti.

Ripensando all'errore più evidente mi rendo conto di come sia importante impostare, fin dal primo anno delle superiori, le basi corrette per poter "costruire" ed apprendere tutte le conoscenze e le competenze necessarie in una disciplina, la matematica, che spesso presenta difficoltà e miscredenze che portano l'alunno ad un parziale rifiuto con conseguente disimpegno nella materia.

L'alunna di cui sopra non si era resa conto che aveva trovato, per x=2, sia un asintoto verticale che un punto di intersezione con gli assi cartesiani; per cui il suo grafico alla fine risultò, per x=2, all'incirca come nella figura a fianco.



Durante la correzione, quando le chiesi come era possibile che avesse accettato un simile grafico, lei disse solo che "era quello che aveva dedotto dallo studio del segno" (errato) che infatti presentava due volte il numero 2.

<u>**Logica si, logica no.**</u>

Ricercando i prerequisiti che servono per preparare gli alunni all'analisi si pone il problema di quando, come e quanto inserire la logica nel curricolo della scuola secondaria superiore: la questione è ampia e dibattuta.

La logica compare nei nuovi programmi di matematica a due livelli:

- ⇒ *come logica matematica*
- ⇒ *come logica <u>nella</u> matematica o <u>per</u> la matematica (da privilegiare nell'insegnamento secondario, in quanto aiutano lo studente ad acquisire consapevolezza delle proprie conoscenze) [D. Paola]*

I quantificatori sono «argomenti specifici» della logica [Bernardi, 1989]; essi sono spesso introdotti presentando i simboli $\exists$ e $\forall$; D. Paola indica la possibilità di collegare tale introduzione ad equazioni e disequazioni, anche parametriche.

D. Palladino ne suggerisce la trattazione nel II o nel III anno, pur sottolineando che «la semantica (tarskiana) della logica dei predicati è troppo astratta per poter essere sviluppata a livello di scuola secondaria e quindi bisogna far appello all'intuizione»: [Palladino, 1997]; ma talvolta gli allievi non collegano i significati dei due quantificatori e ciò può dipendere dalle caratteristiche dell'insegnamento. Lacune di questo genere possono tradursi in ostacoli di non trascurabile importanza (Villani, 1994).

In A Course in Mathematical Logic, Y.I. Manin, New York, 1977 si legge: «la logica è in grado di giustificare la matematica non più di quanto la biologia sia in grado di giustificare la vita».

Se esponiamo ciò che abbiamo visto e sperimentato attraverso
il linguaggio della logica, stiamo facendo scienza…….. *Albert Einstein*

Logica si, ma a piccole dosi

Carlo Dapueto il quale ritiene che lo studio della "logica matematica" sia solo realizzabile in ambito universitario, per la scuola secondaria sostiene:

"Per quanto riguarda gli aspetti di "formalizzazione logica", mi sembra che siano essenzialmente da curare l'acquisizione dell'abitudine alla presentazione ordinata dei passi dimostrativi, l'introduzione graduale di connettivi e quantificatori (senza pretesa di tradurre il linguaggio naturale, ma con significato ristretto al contesto matematico, per superare ambiguità, per descrivere più facilmente e più leggibilmente alcune proprietà, ….. Tutto ciò può essere importante a fini che ora è di moda chiamare "metacognitivi": aumentare negli alunni la padronanza e la consapevolezza, facilitare la "riflessione" sui procedimenti seguiti,…"[MaCoSa].

"*Non si tratta, assolutamente, di fare della logica matematica, quanto, eventualmente, di un'educazione logica intesa in senso lato, cioè riferita ai significati più ampi attribuibili al termine "logica", collegati alle questioni della razionalizzazione, della precisione linguistica, della esplicitazione delle argomentazioni, dell'ordinamento "logico" di una disciplina …"*[MaCoSa].

Motivazioni della scelta della programmazione didattica annuale

Quest'anno insegno in un liceo scientifico in due prime e due seconde: in queste ultime sono indietro col programma e gli alunni hanno gravi lacune (mi è stato riferito che l'insegnante dell'anno scorso non era riuscita a terminare il programma a causa di gravi problemi di disciplina). Le prime invece sono molto eterogenee in termini di capacità e di interesse e molto numerose.

Nella programmazione didattica di inizio anno ho scelto, a differenza della collega di ruolo della classe parallela, di mantenere l'insegnamento degli insiemi e della logica secondo le indicazioni ministeriali; i due moduli non sono però organizzati nel modo

[MaCoSa] **LINGUAGGI E MODELLI NELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE** *Carlo Dapueto*
http://macosa.dima.unige.it/pub/linmod.htm

tradizionale; ho scelto un metodo un po' diverso, ma più adatto a classi con alunni aventi poca voglia di studiare e di seguire con serietà il docente oppure capacità molto scarse (almeno così sembra dopo due mesi di lezione), ma anche alunni che hanno diritto di poter apprendere al meglio le basi di un rigoroso metodo di ragionamento su cui poter costruire il percorso didattico di una scuola, il liceo scientifico, che deve dare tutti gli strumenti, le competenze ma soprattutto le capacità tipiche della disciplina; "*gli studenti hanno bisogno di uno specifico bagaglio culturale che li metta in grado di completare gli studi coerentemente con le caratteristiche del curricolo seguito, ovvero di affrontare gli studi successivi con una sufficiente preparazione matematica*." [Mat2004]

Parlerò quindi, come Dapueto ha suggerito, di formalizzazione logica e, per rendere comprensibile e apprezzabile l'uso dei simboli e delle formule, ritengo che sia conveniente costruire e proporre, gradualmente, situazioni in cui siano evidenti i vantaggi di un linguaggio formale.

Un curricolo ben articolato stimola gli studenti ad apprendere concetti matematici sempre più sofisticati, via via che avanzano negli studi.

Per far comprendere come ho strutturato i moduli di insiemistica e di logica si può vedere la verifica [allegato numero 1] che ho dato alla classe; considero tale scelta positiva e ritengo che, con opportune modifiche, si possa riproporla nei prossimi anni, sempre adeguandola al livello degli alunni e del tipo di scuola.

La programmazione di inizio anno

La valutazione diagnostica effettuata mediante il test di ingresso di settembre aveva evidenziato che la maggior parte degli alunni aveva già buone basi di calcolo numerico; per questo motivo, dopo il "progetto accoglienza", in cui si sono ripetuti gli argomenti fondamentali di natura elementare, propedeutici per lo svolgimento del programma, in modo che tutti gli alunni si trovino ad un uguale potenziale livello di partenza, li ho fatti lavorare per consolidare le capacità di risoluzione di espressioni con frazioni e potenze sia positive che negative.

Una volta terminata la conoscenza reciproca e risolte le difficoltà con la classe che un nuovo ciclo di studi, nuove metodologie e nuovi obiettivi comportano, ho affrontato argomenti per loro meno noti e sicuramente più impegnativi.

Già dalle scuole elementari e medie molti studenti hanno appreso il concetto di insieme, sanno fare calcoli ed utilizzare i numeri, ma al liceo è necessaria una conoscenza approfondita, sistematica ed un linguaggio gradualmente sempre più rigoroso (fino a diventare anche formale) per trattare gli insiemi numerici.

Ho ripresentato "intuitivamente" ***N***, ***Z***, ***Q*** ed in parte anche ***R*** con le relative operazioni e proprietà (la definizione rigorosa mediante classi di equivalenza e corrispondenza biunivoca con la retta verrà ripresa dopo che avranno acquisito i concetti di classe di equivalenza e di funzione biunivoca); parallelamente ho introdotto il concetto di insieme (ad alcuni già noto fin dalle elementari) e ho fatto consolidare la loro capacità di effettuare operazioni tra insiemi utilizzando ***N***, ***Z*** e ***Q***.

[Mat2004] La matematica per il cittadino – Matematica 2004.

Il problema più grande per gli alunni è stato quello di formalizzare in modo rigoroso, tramite la caratteristica, un insieme dato come elenco od in altri modi. Molti hanno trovato difficoltà nel distinguere gli insiemi discreti, per i quali ammettevo la rappresentazione come elenco o come retta "discreta", e $\boldsymbol{Q}$ per il quale ho richiesto la rappresentazione mediante l'uso della retta orientata (scelta effettuata anche dal loro libro di testo), dopo aver spiegato i concetti di insieme denso e continuo (nello stesso periodo ho dimostrato in geometria che la retta è un insieme denso di punti). Come già detto in precedenza, la verifica è stata dedicata alla rappresentazione di un insieme nei vari modi: descrizione "a parole", caratteristica e retta per $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ e $\boldsymbol{Q}$; elenco solo per $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{Z}$; ho cercato di far capire loro che la retta doveva essere soprattutto "di aiuto" per capire come erano costituiti gli insiemi e poterne poi dare la caratteristica.

Ho insistito molto su questo argomento perché lo considero di fondamentale importanza in quanto mi è capitato spesso, anche nella classe in cui abbiamo svolto il project work, di trovare alunni che facevano degli errori nel momento che dovevano rappresentare le soluzioni di una disequazione mediante la caratteristica e viceversa.

Dopo le spiegazioni di unione ed intersezione e mentre ci si incominciava ad allenare con tali operazioni su intervalli, ho introdotto la logica delle proposizioni. Tale argomento secondo me è fondamentale in quanto propedeutico e necessario requisito per acquisire le basi di un corretto ragionamento.

La logica ha molti collegamenti interdisciplinari e presenta un interesse nuovo negli alunni; la logica è alla base del funzionamento dei calcolatori; la materia informatica teorica è presente in poche scuole ed allo scientifico è *inserita* (o forse dovrei dire, *consigliata*) da qualche anno nel programma di matematica, quando invece sarebbe opportuno che fosse una disciplina a se stante con ore proprie ed un insegnante diverso.

La logica in questo caso sarebbe trasversale alle due materie in quanto necessaria anche all'informatica per l'organizzazione e la codifica delle informazioni, la realizzazione degli algoritmi e per la traduzione in un linguaggio di programmazione; per esempio con l'uso delle istruzioni di controllo (if condizione then...) per evidenziare la differenza tra verità e correttezza di una formula e facilitare la comprensione delle differenze tra gli aspetti sintattici e semantici.

Un fondamentale uso della logica lo troviamo nelle dimostrazioni in algebra, in geometria, in analisi, in probabilità ed in altri campi.

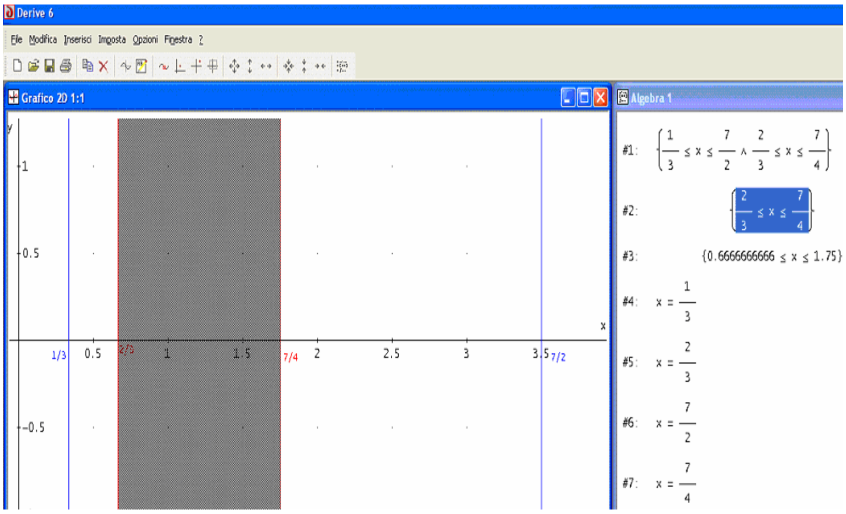
Per questo motivo ho inizialmente suddiviso in due parti la spiegazione: nella prima ho introdotto i connettivi di negazione, congiunzione e disgiunzione inclusiva ed esclusiva (con riferimento al VEL latino) insieme all'insiemistica ed applicati negli esercizi con sottoinsiemi di $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ e $\boldsymbol{Q}$ e relative operazioni.

L'implica ed il coimplica li ho associati successivamente alla spiegazione della condizione necessaria, sufficiente, teorema, ipotesi, tesi e dimostrazione con applicazione immediata in geometria al teorema "la retta è densa ed illimitata". Quest'ultima parte è quella che è maggiormente risultata di difficile comprensione, nonostante sia stata spiegata dopo la verifica sugli insiemi e la prima parte della logica, in cui si erano introdotti i principali concetti che gli alunni avevano quindi già elaborato ed avevano acquisito una buona capacità di "calcolo"; la maggior parte di questi "concetti base" viene poi recuperata nella prosecuzione degli studi, realizzando così una didattica di tipo elicoidale, che riprende gli argomenti approfondendoli di volta in volta in base anche alla maturità raggiunta; gli studenti apprendono la matematica attraverso il ragionamento, ma anche in base alle esperienze e conoscenze precedenti: in questo modo è auspicabile una concezione dinamica dell'apprendimento per tutta la vita (lifelong learning).

"*La forma mentis che la scuola deve far acquisire agli allievi è quella che permette loro di porsi e di risolvere problemi veri*"[Pedagogia].

In matematica il linguaggio gioca un ruolo fondamentale nei processi di apprendimento influenza le prestazioni ed è quindi importante progettare attività didattiche adeguate. Gli studenti alla fine della scuola superiore rischiano di non capire la definizione di limite se non hanno imparato per gradi e con metodo, a leggere e "tradurre" le formule nella lingua naturale e a comprendere il gioco complesso delle alternanze dei quantificatori (per ogni…esiste…per ogni…); e' importante, quindi, far notare le analogie e le differenze nell'uso del linguaggio naturale e dei linguaggi simbolici[MAT2004] ed abituare l'alunno all'uso di un linguaggio rigoroso fin dai primi anni delle superiori. Il progetto PISA, per valutare le competenze nei processi matematici, considera la capacità di servirsi del linguaggio matematico, quella di modellizzare e quella di risolvere problemi.

L'uso del laboratorio



Oltre alla lezione frontale classica ed al lavoro organizzato in gruppi, ho inserito un'ora in laboratorio, mostrando alla classe vari esempi risolti con *derive* (ma esistono molti software che possono *aiutarci* a *fare* matematica).

A fianco riporto uno degli esempi che abbiamo realizzato con derive e che poi è stato inserito nella seconda verifica (vedi oltre).

"*Le ricerche in didattica della matematica che fanno riferimento a quadri di tipo costruttivista […] mostrano che gli strumenti e i mezzi di natura logico simbolica dovrebbero essere integrati da altri (gesti, icone, grafici, rappresentazioni dinamiche…) con il fine di offrire agli studenti strumenti operativi e rappresentativi per esplorare la conoscenza matematica da apprendere e per costruire idee e significati relativi ad essa più appropriati al loro livello di sviluppo e comprensione*".[IRRE ER]

L'utilità del laboratorio appare evidente e gli alunni chiedono volentieri di tornarci; purtroppo però la classe si disperde molto (poca serietà e concentrazione) e si perde eccessivamente tempo; per il momento non sono riuscita a ripetere *l'uscita* (in quanto essendo in una sede staccata bisogna uscire per recarsi nella principale); l'ora di

[Pedagogia] http://www.nuovapedagogia.com/nuovapedagogia.html
[MAT2004] L'importanza del linguaggio. Matematica 2004
[IRRE ER] http://kids.bo.cnr.it/irrsaeer/rivista/innoegionale8-06.pdf ottobre 2007

laboratorio diventa veramente preziosa quando è inserita nell'orario (un'ora a settimana), con la compresenza dell'insegnante tecnico pratico (ITP) che sostiene il docente sia per l'uso dei software sia per mantenere la disciplina.

Elementi per la Valutazione della verifica "insiemi e logica"

In base all'esperienza positiva del secondo project work, quest'anno ho utilizzato lo stesso sistema di valutazione delle verifiche mediante una griglia realizzata con un foglio di calcolo (allegato 3), con l'indicazione del peso di ogni esercizio. Tale peso è stato riportato sul testo del compito in classe (allegato 1) in modo che l'alunno si potesse gestire bene il tempo e scegliere gli esercizi da fare per primi in base alle proprie capacità.

Un fattore essenziale per un compito in classe è la quantità di tempo che l'insegnante assegna per l'effettuazione della prova; se è scarso, infatti, non permette a parte degli alunni di terminare il lavoro. Questo influisce notevolmente sul voto, in quanto se un esercizio non viene fatto per mancanza di tempo, non è possibile, per l'insegnante, valutare quella parte di unità didattica per quegli alunni che sarebbero stati in grado di svolgerlo, e che risulteranno come chi invece non è riuscito per mancanza di conoscenze o capacità. D'altra parte, la velocità e sicurezza di esecuzione di calcoli e ragionamenti è di notevole importanza nella matematica così come nella vita. Ritornerò ampiamente su questo argomento più avanti nella relazione.

Purtroppo è stato proprio questo fattore che ha creato molti problemi; nonostante avessi richiesto di non fare la bella e la brutta copia e di cercare di ottimizzare i tempi, considerando che probabilmente alle scuole medie erano abituati a tempistiche diverse, alcuni alunni non sono riusciti a terminare in quanto hanno dedicato *spazio* ai primi esercizi facendo l'ultima parte troppo frettolosamente.

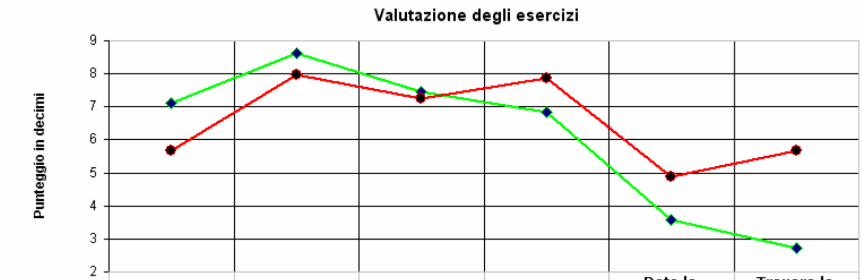
Nelle due classi in cui ho proposto la stessa verifica ho agito in modi diversi e questo mi ha permesso di fare un confronto per capire quale sia la soluzione migliore per l'apprendimento degli alunni e per una corretta valutazione delle loro capacità.

Nella prima classe (IH) il tempo è stato sfruttato al meglio: era una 1^{a} ora, abbiamo iniziato subito, c'è stato silenzio, serietà e concentrazione; avendone la possibilità ho concesso 10 minuti in più a chi non aveva terminato nei 55 minuti.

Nell'altra classe (ID), non essendo la 1^{a} ora si è perso più tempo inizialmente e, durante la prova, si è creato un clima di poca concentrazione generale; al suono della campana ho fatto consegnare subito poiché non potevo lasciare un'altra classe scoperta.

Durante la correzione delle verifiche ho tenuto conto, in parte, di tali differenze, giudicando in modo più rigoroso, specialmente nel primo esercizio, gli errori della classe che ha avuto più tempo a disposizione.

La media dei voti della IH è 6,3; in ID la media è 5,7; in ID, durante la correzione, gli alunni si sono lamentati del poco tempo: avrebbero voluto 10 minuti in più; questo è confermato dal grafico di comparazione dei voti dei singoli esercizi nelle due classi (figura a fianco).



	Teoria: N,Z,Q	Insiemi: A,B,C,D	Unione/Intersezione	Sottoinsiemi	Data la caratteristica (A1/A10)	Trovare la caratteristica (A,..,F)
Media 1D	7,1	8,6	7,5	6,8	3,6	2,7
Media 1H	5,7	8,0	7,2	7,9	4,9	5,7

In IH (linea rossa) in primi due esercizi hanno avuto punteggi minori (forse anche perché li ho valutati in modo più severo), il terzo è stato pressoché uguale, mentre gli altri ed in particolare gli ultimi due (i più importanti) nella classe che ha avuto poco tempo, la ID (linea verde), sono andati decisamente peggio.

Penso che per i ragazzi, questa esperienza possa comunque essere stata spunto di riflessione e momento di apprendimento; se l'alunno ha buone capacità deve riuscire ad esprimerle anche in tempistiche ristrette; ognuno deve però capire dove e perché ha perso il tempo: nei disegni, nei ragionamenti, nel fare domande all'insegnante o forse solo nel perdere la concentrazione a causa dei compagni (in fondo ricordiamoci che stiamo parlando di una classe prima e siamo ad inizio anno).

Dal mio punto di vista invece, ritengo che avrei dovuto dare 10 minuti in più o qualche quesito in meno, per esempio dimezzando l'esercizio n° 3. Per questo motivo, ho deciso di far fare in ID un'altra prova (allegato 2), lasciando il tempo necessario per il completamento della tabella ed imponendo contemporaneamente maggiore silenzio; durante la verifica mi sono state fatte nuovamente troppe domande, a cui ho comunque risposto perchè ritengo che siano un momento di apprendimento preziosissimo (soprattutto nelle scuole professionali nelle quali le capacità e l'impegno degli alunni sono molto limitate e concentrate al momento della prova in classe); rispondere in modo appropriato, in modo da farli ragionare e riflettere è utile all'alunno ed è per l'insegnante parte del processo di individualizzazione dell'insegnamento che noi docenti cerchiamo sempre di più di realizzare, ma che i tempi ristretti e le classi numerose non permettono di farlo come si vorrebbe e dovrebbe.

Dopo la seconda verifica (allegato 2), costituta prevalentemente dagli esercizi 3 e 4 della prima, ma strutturata in modo leggermente diverso, ho confrontato i voti delle due prove (allegato 4), analizzando le differenze:

⇒ il grafico delle frequenze non ha evidenziato un gran miglioramento globale (ciò potrebbe provare che il tempo non è stato un fattore determinante?).

⇒ la media complessiva di ogni verifica è sostanzialmente uguale: 5,72 e 5,78.

⇒ l'analisi dei singoli casi evidenzia che una parte degli alunni ha beneficiato del maggior tempo a disposizione (o della correzione della prova precedente?); qualcuno è anche peggiorato, ma sono pochi casi (vedi allegato 4); due di loro mi hanno fatto pensare ad un possibile lavoro poco autonomo durante la prima prova. Per tutti gli altri la seconda verifica non ha modificato di molto la prima valutazione attribuita confermando la sostanziale correttezza della prima valutazione.

In questa classe, a causa di questa ripetizione di attività il programma è rimasto un po' indietro rispetto all'altra; inoltre in altri contesti avrei potuto considerare agli alunni il massimo tra i due voti conseguiti (per lo meno per coloro che avevano solo votazioni positive), ma purtroppo nella mia scuola si fa il trimestre e per avere un sufficiente numero di valutazioni al momento devo tenere in considerazione tutti i voti.

Ad ogni modo spero che grazie alla seconda correzione ed avendo individualizzato gli esercizi in base ai problemi rilevati possa essere considerata una buona attività di recupero ed oltre che una verifica solo sommativa, per la certificazione delle competenze, anche e soprattutto formativa. In effetti nei giorni precedenti il primo compito in classe ho dato come verifica formativa (simulazione) lo stesso testo cambiando simboli e numeri negli esercizi: nella prima classe è stata svolta pressoché individualmente, con domande dei singoli alunni e relative risposte da parte mia, seguita dalla correzione alla lavagna. Nella seconda classe invece la simulazione è diventata un lavoro di gruppo, forse per i tempi più stretti dovuti a perdite di lezioni nei giorni precedenti o forse per le minori capacità degli alunni, con la conseguenza che alcuni non si sono "messi alla prova" come se fossero in una vera verifica e di conseguenza non si sono resi conto "prima del compito" delle reali difficoltà che avrebbero incontrato. Tale classe ha avuto un maggior tempo di studio casalingo tra la simulazione ed il compito che però non ha portato ad alcun beneficio. La strategia vincente è stata quella della prima classe: simulazione individuale o quasi, correzione collegiale, verifica sommativa il giorno successivo.

Vincente ritengo sia stato anche l'uso delle griglia di valutazione adottata nel secondo project work in quanto gli alunni hanno potuto capire gli errori commessi utilizzando la tabella dei descrittori e si sono potuti preparare al meglio per la verifica di fine modulo sulle basi del ragionamento.

Inoltre la valutazione di ogni esercizio in decimi ha permesso loro di capire quanto fosse grave l'eventuale errori o se l'esercizio era stato svolto in modo completo e corretto; solo con la seconda tabella che moltiplica il voto in decimi per il peso attribuito all'esercizio e dalla quale si ottiene il punteggio che serve a formare il voto finale hanno potuto valutare se il tempo e l'impegno dedicati ad un quesito erano proporzionali al punteggio conseguito.

Nella prima verifica, per esempio, molti alunni hanno perso molto tempo nello spiegare se un insieme era incluso in un altro, ma tale motivazione dava solo mezzo decimo se corretta.

Modulo 1: Le basi del ragionamento

Per ragioni di spazio non entro nei dettagli di come ho impostato tutto il modulo, vorrei però soffermarmi su un'attività che ho dato alla classe in preparazione della verifica su questa parte di programma.

Ho consegnato alla classe, un'esercitazione da svolgere a piccoli gruppi con esercizi di vario genere (vedi allegato 7) che richiedevano di ragionare e mettere in pratica le nozioni apprese finora. Tenendo conto che gli esercizi erano abbastanza impegnativi mi aspettavo una certa difficoltà nell'esecuzione del lavoro, considerando il fatto che si trattava di una prima classe ad inizio anno scolastico.

Quello che volevo capire era quanto gli alunni erano disposti a insistere per capire da soli la risoluzione di un esercizio prima che fosse data loro la spiegazione da parte dell'insegnante. Premetto che pochi hanno lavorato in gruppo, e che i più bravi hanno preferito risolvere i quesiti autonomamente. Com'era prevedibile la classe si è divisa in tre parti: alcuni alunni sono riusciti, anche se con molta lentezza, a risolvere da soli alcuni esercizi, altri ci sono arrivati grazie ai compagni di gruppo e alla correzione collegiale, qualcuno, e purtroppo non pochissimi, non hanno voluto fare lo sforzo di cercare di capire i quesiti più impegnativi accontentandosi dei più semplici.

La settimana prossima preparerò la verifica scegliendo alcuni esercizi e modificandoli minimamente; assocerò una parte teorica con le definizioni e proprietà su teoremi, relazioni e funzioni.

L'esercizio che è stato meglio compreso e che avrà maggiore peso nella prossima verifica è l'ultimo, sul grafico di funzioni e l'obiettivo principale per cui l'ho dato è stato quello di farli esercitare nel calcolo numerico: ho richiesto loro di sostituire alla variabile x un consistente numero di valori delle ascisse (consigliati x=0, x=1, x=2, x=-1, x=-2, $x=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$); in questo modo mentre si esercitavano nelle espressioni numeriche, potevano constatare l'esattezza dei calcoli ponendo i punti appena trovati sul piano cartesiano. Alla fine di ogni funzione hanno potuto verificare l'esattezza della curva mediante la ricerca del grafico da loro ottenuto, nella figura composta da molti grafici, che inizialmente era apparsa incomprensibile, ma che adesso con la costruzione di ogni singola curva aveva assunto un nuovo significato.

L'altro motivo per cui questo esercizio assume una rilevanza didattica è dovuto al fatto che in questo modo gli alunni iniziano a familiarizzarsi con funzioni che dovranno imparare a *studiare* con la geometria analitica e con l'analisi negli anni successivi.

Qualche anno fa ho dato un esercizio simile in una quinta geometri serale come quesito di terza prova all'esame di maturità. La prima domanda richiedeva proprio di associare il grafico all'equazione (3 in tutto); alcuni alunni hanno perso tempo a fare l'intersezioni con gli assi cartesiani oppure cercando massimi e minimi senza ricordare che bastava sostituire alcuni punti scelti opportunamente ed ottenere quanto richiesto con pochissimi calcoli.

Conclusioni

Secondo il Ministro della Pubblica Istruzione Giuseppe Fioroni è in corso *un'emergenza* (allegato 6) per la quale ha recentemente deciso di avviare un piano di interventi con più azioni, convocando il "Comitato Scientifico della Matematica", composto da 29 esperti, per riuscire a destare la curiosità e la voglia di apprendimento dei ragazzi nei confronti delle materie scientifiche.

"Come *far capire, studiare e piacere la matematica ai ragazzi*?" [MAT]

Aggiungerei "come acquisire una mentalità matematica"?

Già qualche anno fa la commissione dell'Unione Matematica Italiana per l'insegnamento della matematica (C.I.I.M.) ha elaborato un curricolo per la scuola

[MAT] http://www.pubblica.istruzione.it/ministro/comunicati/2007/071107matematica.shtml primaria e secondaria, definendo le conoscenze fondamentali in tale disciplina, indipendenti dai vari corsi di studio.

In quell'occasione è nata l'idea della "matematica per il cittadino" che consiste in un corpus di conoscenze e competenze fondamentali necessarie a vivere nella nostra società. Sono state date agli insegnanti delle "indicazioni programmatiche".

Le attività suggerite dall'UMI, che abbiamo analizzato in vari corsi di laboratorio in quest'anno, sono un prezioso aiuto per il docente, ma necessitano di molto tempo in classe e questo può essere un problema in alcuni percorsi scolastici (esempio licei) in cui è fondamentale acquisire, per prima cosa, i concetti fondamentali per la prosecuzione degli studi.

Un altro aiuto per l'insegnante può essere dato da un uso appropriato della tecnologia in modo che gli studenti possano sviluppare una comprensione più profonda della matematica; il computer permette loro di approfondire il ragionamento, la riflessione, la capacità di problem solving, le decisioni da prendere. Il potere e la versatilità della tecnologia rende possibile e insieme necessario riesaminare "cosa" e "come" potrebbero imparare gli studenti di matematica.

Un'altra strada percorribile è quella di "trasformare la docenza in un'attività dinamica, comunicativa; questa è la base di un *cambio* qualitativo dei processi di insegnamento/apprendimento indirizzati verso il raggiungimento della competenza"[Pinilla].

Significativa a questo proposito è la risoluzione approvata all'unanimità nel 1997, in cui la Conferenza generale dell'UNESCO così si esprime:

"…considerata l'importanza centrale delle matematica e delle sue applicazioni nel mondo odierno nei riguardi della scienza, della tecnologia, delle comunicazioni, dell'economia e di numerosi altri campi; consapevole che la matematica ha profonde radici in molte culture e che i più importanti pensatori per migliaia di anni hanno portato contributi significativi al suo sviluppo, e che il linguaggio e i valori della matematica sono universali e in quanto tali ideali per incoraggiare e realizzare la cooperazione internazionale; si sottolinea il ruolo chiave dell'educazione matematica, in particolare al livello della scuola primaria e secondaria sia per la comprensione dei concetti matematici, sia per lo sviluppo del pensiero razionale"[Mat2003]

In conclusione ritengo che in matematica ci sia uno stretto legame tra competenze e contenuti, e che la matematica "si impara" e "si impara ad amarla", facendola, come ad esempio la musica; se vogliamo risolvere questa emergenza italiana dobbiamo far appassionare i giovani alle materie scientifiche abituandoli, fin dai primi anni, ed in particolare dall'inizio della scuola superiore, a *formalizzare*, a *ragionare* in pratica a *matematizzare* adottando strategie di insegnamento che inducano lo studente ad impegnarsi per acquisire quelle capacità necessarie alla prosecuzione degli studi o all'entrata nel mondo del lavoro, ad essere cittadini preparati e consapevoli che dovranno aiutare l'Italia a competere sempre al meglio con gli altri stati.

[Pinilla] Competenza e valutazione: una sfida dell'educazione di oggi. M.I.F. Pinella. Bologna http://www.rivista.istruzioneer.it/eventi/archivio/valutazione/pinilla.ppt

[Mat2003] Notiziario UMI Gennaio - Febbraio 2007: **Didattica**; http://umi.dm.unibo.it/italiano/Didattica/2007/didattica0102.html

Bibliografia

Valutare le competenze in scienze, lettura e matematica.
Quadro di riferimento di PISA 2006 (2007) a cura dell'OCSE Roma: Armando

Elementi di didattica della matematica.
D'Amore B. (1999). Bologna: Pitagora

Competenze in matematica.
D'Amore B., Godino D.G., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). Bologna: Pitagora.

Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica.
D'Amore B. (2003). Bologna: Pitagora

Curricolo e valutazione in matematica.
Fandiño Pinilla M.I. (2002). Bologna: Pitagora.

La matematica del novecento.
Piergiorgio Odifreddi (2000). Einaudi

Sitografia

La problematica del definire e del dimostrare nella costruzione di un progetto per l'insegnamento della matematica. Paragrafi 6 *Sulla dimostrazione (argomentazione, ...)*e 7 *linguaggio, logica, calcolatore.*
http://macosa.dima.unige.it/pub/defdim.htm#7
LINGUAGGI E MODELLI NELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE. Carlo Dapueto
http://macosa.dima.unige.it/pub/linmod.htm

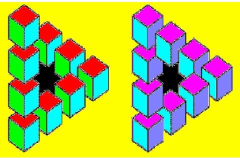
La literacy matematica. **Quadro di riferimento di PISA 2006. da Pag. 86**
http://www.invalsi.it/ric-int/Pisa2006/sito/docs/Quadro_riferimento_PISA2006.pdf

Le prove INValSI e la valutazione in matematica
http://www.matematicainsieme.it/Valermath/relazione%20finale%20VALERMATH.pdf

Il problema della valutazione di Margherita Colasuonno
http://www.gildacentrostudi.it/riforma/240905valutazione.htm

Competenza e valutazione: una sfida dell'educazione di oggi
Martha Isabel Fandiño Pinilla N.R.D. Bologna
http://www.rivista.istruzioneer.it/eventi/archivio/valutazione/pinilla.ppt#3

ELABORAZIONE DI UN PERCORSO DI LOGICA RELATIVO ALL'INTERO QUINQUENNIO
Domingo Paola LS "G. Bruno", Albenga, Savona
http://www.matematica.it/paola/Percorso.pdf



ALLEGATO 1 Prima verifica su insiemi e logica

Esercizio 1:

Punti 2/10

Descrivi le caratteristiche di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ anche mediante l'utilizzo di esempi.

Esercizio 2:

Punti 1/10

A ={x∈ **N** : 2<x<7} B ={x∈ **N** : 3≤x≤8} C ={x∈ **Z** : 6≤x} D ={x∈ **Q** : x≠7}

Individua A, B, C, D rappresentandoli

⇒ con il metodo di elencazione (quando non è possibile, dai una descrizione "con parole tue")

⇒ con la rappresentazione sulla retta

Calcola il risultato delle seguenti operazioni sui precedenti insiemi, esprimendo il risultato in tutti i modi possibili.

Punti 2/10

A∪B∪C (A∩B) ∪(A∩C) C∪(A∩B) C∪∅∪ (B∩C)

Rispondi alle seguenti domande motivando brevemente la tua risposta:

Punti 1/10

A⊆B ? A⊆D ? B⊆C ? C⊆D ? A⊆B? D⊆C ?

Esercizio 3:

Punti 2/10

Individua i seguenti insiemi con il metodo di elencazione (quando è possibile), se necessario descrivendo l'insieme con parole tue o con una diversa caratteristica e con la rappresentazione sulla retta facendo attenzione ad indicare chiaramente il risultato dell'AND e dell'OR.

.

A1 ={x∈ **N** : 2<x<7 ∨ 3≤x≤8} A2 ={x∈ **N** : 2<x<7 ∧ 3≤x≤8}

A3 ={x∈ **Z** : 6≤x ∨ 3≤x≤8} A4 ={x∈ **Q** : x≠7 ∧ 3≤x≤8}

A5 ={x∈ **N** : x<7 ∨ 3≤x≤8} A6 ={x∈ **N** : 2<x ∧ 3≤x}

A7 ={x∈ **Z** : 6≠x ∨ x≤8} A8 ={x∈ **Q** : x<8 ∧ 3≤x≤8}

A9 ={$2^3 \cdot 2^6 \neq 2^9$, $2^3 + 2^6 = 2^9$, $2^3 \cdot 2^6 = 2^{18}$ } A10 = { x∈**Z** } ∩ { x∉**Z** }

Esercizio 4:

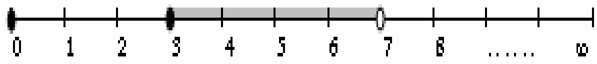
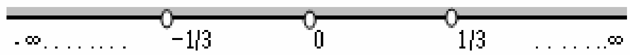
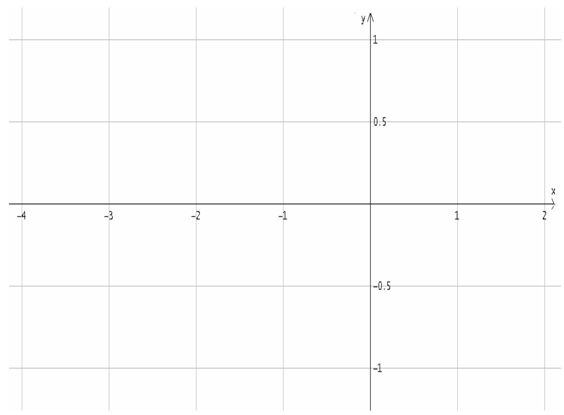
Punti 2/10

Esprimi i seguenti insiemi rappresentandoli sulla retta e per <u>caratteristica</u> (con l'uso dei connettivi che ritieni più efficaci per esprimere l'insieme)

A = { 0, 1, 3, 4, …..} B = { 1, 2, 3, 4} C = { …..-2, -1,0, 1, 2,…..} D = { …..-2, -1, 1, 2,…..}

E = { tutte le frazioni con numeratore 1 e denominatore positivo} F = { …..-2, -1,0, 7, 8, 9,…..}

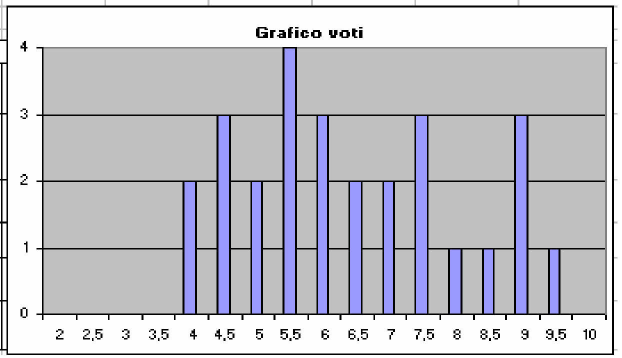
VERIFICA DI MATEMATICA ***Metodi di rappresentazione degli insiemi***

<table>
<tr><th>Caratteristica</th><th>Nome – Elenco - Descrizione</th><th>Rappresentazione sulla Retta o sul Piano</th></tr>
<tr><td></td><td>{ 0, 1, 2, 4, 5, -1,-2,-3,-4}</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\{x \in \boldsymbol{Q}:$
$x=5 \wedge (x < 6 \vee x \geq 4)\}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>{0}</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>{...,-1, 0, 10, 11, 13, 14, 15, …}</td><td></td></tr>
<tr><td>$\{x \in N: 10 < x \vee (x < 7 \wedge 4 < x \leq 7)\}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Tutti i numeri razionali negativi</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\left\{x \in Q: \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{7}{2} \wedge \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{4}\right\}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Z -{x ∈ N: x = 0 ∨ x =10}</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\boldsymbol{Z_0} \cup (\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{N_0})$</td><td></td></tr>
<tr><td>{(x,y):
$\forall x \in \boldsymbol{Q}\ \exists y \in \boldsymbol{Q}$
$y = -\frac{1}{2}x^2 - x$
$\wedge$
$-4 < x \leq 2\ \}$</td><td colspan="2">
<table>
<tr><th>x</th><th>$-\frac{1}{2}x^2 - x$</th></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>-1</td><td></td></tr>
<tr><td>-2</td><td></td></tr>
<tr><td>$-2,5$</td><td></td></tr>
</table>

</td></tr>
</table>

ALLEGATO 3 Valutazione prima verifica classe 1 H con le griglie utilizzate nel project work

		Valutazione da 0 a 10 di ogni esercizio						Punteggi in decimi= valutazione decimale*peso								
								2	1	2	1	2	2			
	Voto in decimi	N,Z,Q	A,B,C, D	∩ ∪	⊆	A1/A1 0	A,..,F	N,Z,Q	A,B,C,D	∩ ∪	⊆	A1/A10	A,..,F			
.....	4	5	6	1	5,5	3,75	4,5	1	0,6	0,2	0,55	0,75	0,9	4	2	0
.....	4,3	6,5	5	2	5	4	4	1,3	0,5	0,4	0,5	0,8	0,8	4	2,5	0
.....	7,2	7	10	10	8	2	8	1,4	1	2	0,8	0,4	1,6	4,2	3	0
.....	8,3	6	8	10	10	8	8,5	1,2	0,8	2	1	1,6	1,7	4,25	3,5	0
.....	8	8,75	8,5	10	7	6,5	7	1,75	0,85	2	0,7	1,3	1,4	4,3	4	2
.....	6,25	8	7,5	10	9	2,5	2,5	1,6	0,75	2	0,9	0,5	0,5	5	4,5	3
.....	5,65	4	9	7	7,5	4	5	0,8	0,9	1,4	0,75	0,8	1	5	5	2
.....	5,8	5	9	8	9	2	5	1	0,9	1,6	0,9	0,4	1	5,28	5,5	4
.....	5,5	5	7	8	6	5	3	1	0,7	1,6	0,6	1	0,6	5,5	6	3
.....	9,5	5,5	10	10	10	10	12	1,1	1	2	1	2	2,4	5,5	6,5	2
.....	7,05	5	7,5	7,5	8	7	8	1	0,75	1,5	0,8	1,4	1,6	5,5	7	2
.....	7,5	5	10	10	9	3	10	1	1	2	0,9	0,6	2	5,65	7,5	3
.....	6,64	4,7	8	10	9	5	5	0,94	0,8	2	0,9	1	1	5,8	8	1
.....	4	5	7,5	5	5,5	2,5	1	1	0,75	1	0,55	0,5	0,2	6	8,5	1
.....	5	5	8,5	3	5,5	4	6	1	0,85	0,6	0,55	0,8	1,2	6,05	9	3
.....	8,55	6	9	10	9,5	7,5	10	1,2	0,9	2	0,95	1,5	2	6,25	9,5	1
.....	5	4	7	7	10	2	3,5	0,8	0,7	1,4	1	0,4	0,7	6,64	10	0
.....	6,05	4,5	7	10	5,5	5,5	4	0,9	0,7	2	0,55	1,1	0,8	7		
.....	5,5	5	9	6	7	5,5	3	1	0,9	1,2	0,7	1,1	0,6	7,05		
.....	8,7	8	8	10	10	6,5	10	1,6	0,8	2	1	1,3	2	7,2		
.....	8,85	7	8,5	10	10	7	11	1,4	0,85	2	1	1,4	2,2	7,5		
.....	6	4	9	7	5	6	6	0,8	0,9	1,4	0,5	1,2	1,2	8		
.....	7	7	7	8	10	7,5	4	1,4	0,7	1,6	1	1,5	0,8	8,3		
.....	4,2	5	8	3	8	5	0	1	0,8	0,6	0,8	1	0	8,55		
.....	5,5	7,5	7	3	8	2,5	7	1,5	0,7	0,6	0,8	0,5	1,4	8,7		
.....	4,25	4	7,5	6	6	4,5	0	0,8	0,75	1,2	0,6	0,9	0	8,85		
.....	5,28	6	7	4	9	3	5,4	1,2	0,7	0,8	0,9	0,6	1,08	9,5		
Media	6,28037															

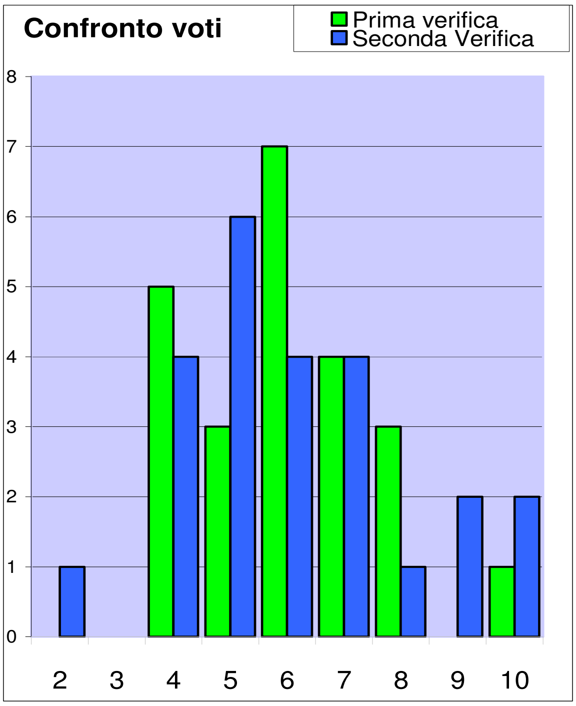
	Simbolo	Descrittori
Esercizio 1	N,Z,Q	Conoscenza degli insiemi dei numeri naturali, interi e razionali; saper dire da quali elementi sono composti, saperne dare vari rappresentazioni; conoscerne le caratteristiche e le differenze fondamentali
Esercizio 2.1 e Esercizio 3	A,B,C,D	Saper individuare un insieme data la sua proprietà caratteristica e saperlo rappresentare come elenco, riconoscendo quando è possibile oppure no; saperlo rappresentare su di una retta utilizzando il corretto simbolismo.
Esercizio 2.2	∩ ∪	Saper operare con gli insiemi rappresentando il risultato nei vari metodi
Esercizio 2.3	⊆	Saper riconoscere un sottoinsieme ed usare la corretta terminologia.
Esercizio 3	A1/A10	Saper utilizzare i connettivi logici
Esercizio 4	A,..,F	Saper rappresentare un insieme mediante caratteristica con l'appropriato uso dei connettivi logici.



ALLEGATO 4 **Confronto dei voti tra le due verifiche della classe 1 D**

Tabella riassuntiva dei voti delle due verifiche della classe 2D

	Voto Verifica 1	Voto Verifica 2	Differenza	Voti 1	Voti 2	Classi	Frequenze 1	Frequenze 2
...	6,3	6	-0,30	3,65	2	2	0	1
...	6	9	3,00	3,8	3,5	3	0	0
...	3,85	a		3,85	3,5	4	5	4
...	5,8	5,7	-0,10	3,9	3,8	5	3	6
...	3,65	4,2	0,55	4	4	6	7	4
...	a	5,2		4,25	4,2	7	4	4
...	3,9	2	-1,90	4,7	4,5	8	3	1
...	7,5	6,5	-1,00	5	4,8	9	0	2
...	5,3	5	-0,30	5,3	5	10	1	2
...	3,8	4	0,20	5,3	5			
...	4,25	3,5	-0,75	5,6	5			
...	6,64	4,5	-2,14	5,8	5,2			
...	5,8	5	-0,80	5,8	5,7			
...	5	7	2,00	5,8	5,8			
...	5,3	4,8	-0,50	6	6			
...	4,7	3,8	-0,90	6,2	6,5			
...	6,8	6,5	-0,30	6,3	6,5			
...	5,8	7,5	1,70	6,64	7			
...	4	5	1,00	6,8	7			
...	a	a		7,5	7,5			
...	9,5	9,5	0,00	7,8	8,5			
...	7,8	9,3	1,50	8	9			
...	a	3,5		9,5	9,3			
...	8	7	-1,00	a	9,5			
...	5,6	5,8	0,20	a	a			
...	6,2	8,5	2,30	a	a			
			Media	**5,72**	**5,78**			



ANALISI: Dal grafico delle frequenze si può vedere che nella prima verifica (verde) ci sono state un maggior numero di insufficienze ed i voti erano concentrati tra 4 ed 8; nella seconda (blu) c'è stata una maggiore distribuzione dei voti dal 2 al 10; le medie però sono molto vicine.
Un'analisi più dettagliata delle differenze può forse far comprendere il motivo di questo apparente NON miglioramento delle competenze acquisite.
Cinque alunni (in giallo) hanno migliorato da 1,5 fino a 3 decimi ed erano in gran parte coloro che si erano lamentati per la mancanza di tempo nella prima verifica. Uno si è portato dal 4 al 5 (rosa). In Dieci hanno sostanzialmente confermato il voto precedente. Dei 4 alunni che sono peggiorati di al massimo un decimo (arancione), l'alunna che è passata dall'8 al 7 ha detto che stava male (e le credo sicuramente), nel caso degli atri tre penso che sia dovuto al fatto che nella prima verifica c'erano i primi due esercizi che erano basati maggiormente sulle conoscenze e su semplici calcoli con gli insiemi, limitando al minimo la logica. Nella seconda verifica invece la logica era presente in quasi tutti gli esercizi (l'alunno che è passato da $7\frac{1}{2}$ a $6\frac{1}{2}$ ha spesso scambiato and con or in entrambe le verifiche).
Per quel che riguarda i due peggioramenti più vistosi (rosso) credo che abbiano avuto degli "aiuti" dai compagni nella prima verifica, mentre nella seconda uno dei due (-1,90) è stato spostato davanti e l'altra (-2,14) ha lavorato da sola (forse perché la compagna davanti era quella che non stava bene?).

Esempio 1.1 Siano: $A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 > 2\}$

(1) Scrivere alcuni elementi dell'insieme A ed alcuni elementi dell'insieme B.
(2) Descrivere i seguenti insiemi:

- $A \cap B$
- $A \cup B$
- $A \setminus B$

Esempio 1.2 Dati gli insiemi $A = \{0, 1\}$ e $B = \{a, b\}$, determinare tutte le possibili funzioni di A in B e darne una rappresentazione grafica.

Esempio 1.3 Si consideri l'insieme di parole $A = \{ananas, mela, gatto, mano\}$ e l'insieme di numeri $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. La legge che associa ad ogni parola dell'insieme A il numero di vocali in essa contenute è una funzione definita su A a valori in B ?

Esempio 1.4 *Definizione: Dati due numeri naturali a e b diversi da zero, un intero d viene detto massimo comun divisore fra a e b se valgono le seguenti tre proprietà:*

(1) d è un divisore di a
(2) d è un divisore di b
(3) se c è un divisore comune fra a e b allora c è un divisore di d.

Applicare questa definizione per dimostrare che:

(1) 4 è il massimo comun divisore fra 24 e 28
(2) 5 non è il massimo comun divisore fra 35 e 38
(3) 3 non è il massimo comun divisore tra 15 e 45.

Esempio 1.5 Spiegare la seguente affermazione *Non si può dividere per zero.*

Esempio 1.6 Tradurre il seguente enunciato in una formula matematica:

Dividendo 27 per 6 si ottiene come quoziente 4 e come resto 3.

Esempio 1.7 *Teorema: Per ogni coppia di naturali m, n, con $n \neq 0$, esistono e sono unici due naturali q, r tali che $m = nq + r$ e $0 < r < n$.*

(1) Individuare ipotesi e tesi del precedente teorema.
(2) Determinare q e r, nel caso in cui $m = 20$ e $n = 6$.
(3) Nell'enunciato precedente, quali lettere designano rispettivamente quoziente e resto?
(4) Perché è necessaria la condizione $n \neq 0$? Cosa potrebbe succedere se non fosse verificata? Fare qualche prova numerica.
(5) Sarebbe meglio mettere la condizione $n \leq m$? Cosa accade se $n > m$?
(6) Cosa accade se $m = 0$?

Esempio 1.8 Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali considerare la proprietà $P(x)$:

"*x verifica $x + 3 > 5$.*"

(1) È vero o falso che $\forall x \in \mathbb{N}$ vale $P(x)$?
(2) È vero o falso che $\exists x \in \mathbb{N}$ per cui vale $P(x)$?
(3) Determina un sottoinsieme A di $\mathbb{N}$ tale che $\forall x \in A$ vale $P(x)$.
(4) Determina un sottoinsieme B di $\mathbb{N}$ tale che risulti falso che $\exists x \in B$ per cui vale $P(x)$.
(5) Rispondere alle domande precedenti nel caso in cui la stessa proprietà sia considerata nell'insieme $\mathbb{R}$.

Esempio 1.9 Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(1) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} :\ x - y = 3.$
(2) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} :\ x - y = 3.$
(3) $\exists x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} :\ x - y = 3.$
(4) $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} :\ x - y = 3.$

Esempio 1.10 Siano a, b, c numeri reali arbitrari. Quali delle seguenti implicazioni sono vere e perché? In quali è necessario imporre la condizione che uno o più numeri siano diversi da zero affinché siano vere e perché? In quali è necessario imporre che siano positivi?

(1) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
(2) $a < b \Rightarrow ac < bc$
(3) $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
(4) $a < b \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Esempio 1.11 Definizione: Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$. Il numero M si dice massimo dell'insieme A se $M \in A$ e per ogni a di A si ha: $M \geq a$.

(1) Dimostrare che $7/2$ non è il massimo dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} | \ 1 < x < 4\}$
(2) Dimostrare che l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} | \ x > 3\}$ non ha massimo.
(3) Dimostrare che l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} | \ x < 2\}$ non ha massimo.

Esempio 1.12 Quale delle seguenti espressioni significa:

ogni numero intero è multiplo di 7?

a) $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z} : a = 7b$
b) $\exists a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z} : a = 7b$
c) $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z} : a = 7b$
d) $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z} : a = 7b$

Esempio 1.13 Quale delle seguenti espressioni significa:

non è vero che ogni numero intero è multiplo di 7?

a) $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z} : a \neq 7b$
b) $\exists a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z} : a \neq 7b$
c) $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z} : a \neq 7b$
d) $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z} : a \neq 7b$

Esempio 1.14 Quale è il maggiore tra:

(1) $10/3$ e 3.331?
(2) π e $314/100$?
(3) $6,28$ e 2π?

Esempio 1.15 Trovare i numeri x che verificano la condizione

$$(x+2)(x^2+1)(x^2-1) = 0$$

Esempio 1.16 Disporre in ordine crescente i seguenti numeri:

$0,30; \qquad 0,7; \qquad 0,15; \qquad 0,1.$

Esempio 1.17 Indicare la sesta cifra dopo la virgola del numero $12,652 \cdot 10^{-4}$

Esempio 1.18 Utilizzando una calcolatrice, per tentativi, cercare un numero x tale che $x^5 + x^3 = 1$.

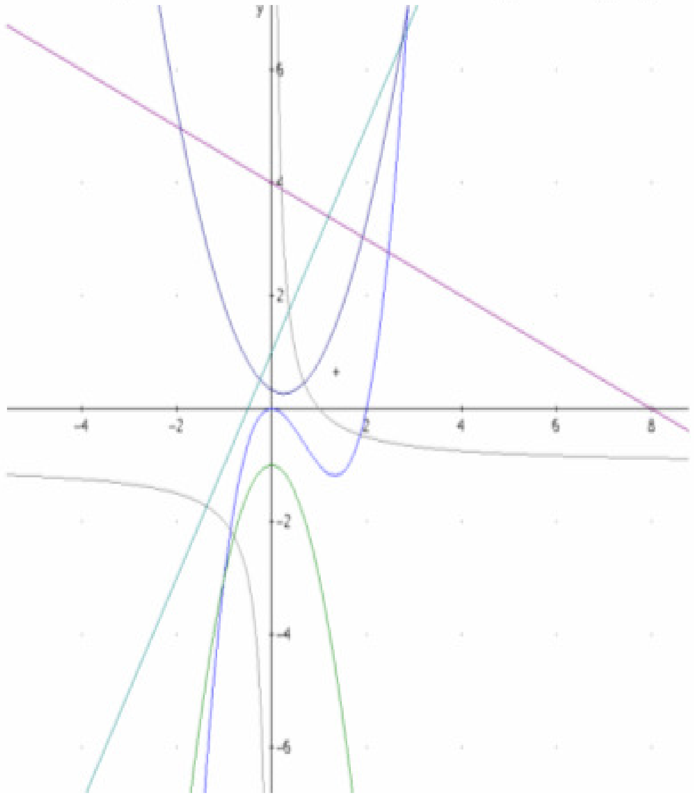
Esempio 1.19 Scrivere le espressioni decimali dei numeri

$$1, \qquad 1+\frac{1}{4}, \qquad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}, \qquad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}, \qquad \dots$$

e confrontarle con l'espressione decimale di $\frac{\pi^2}{6}$.

Esempio 1.2

Associa ad ogni curva la corretta funzione ridisegnandone ogni grafico e trovandone alcuni punti



$f : \Re \to \Re$

$x \mapsto -\frac{1}{2} \cdot x + 4$

$x \mapsto -2 \cdot x^2 - 1$

$x \mapsto x^3 - 2 \cdot x^2$

$x \mapsto 2 \cdot x + 1$

$x \mapsto x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{3}$

$x \mapsto \frac{1}{x} - 1$

Parzialmente tratto da http://umi.dm.unibo.it/italiano/Editoria/NUMI2006/MATTONCINI.pdf

Il Comitato Tecnico provvederà a:

⇒ condurre una ricognizione dello status dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di primo e secondo grado, con particolare attenzione alle peculiarità dei diversi indirizzi di studio, anche sulla base dell'analisi dei risultati e dei monitoraggi dell'INValSI;

⇒ definire linee di indirizzo generali per il miglioramento della qualità dell'insegnamento della matematica, procedendo anche a preventive audizioni di rappresentanze di associazioni scientifiche, professionali e disciplinari, università e istituti di ricerca;

⇒ promuovere progetti di collaborazione sistematica con le università, gli editori e l' Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica sui temi dell'innovazione nella didattica della matematica;

⇒ contribuire al miglioramento dell'apprendimento della matematica mediante: la definizione di piani di accompagnamento per gli obiettivi formativi previsti dalle indicazioni nazionali per il primo ciclo e ***per il biennio dell'obbligo la riorganizzazione degli obiettivi formativi della disciplina nei diversi indirizzi di studio della scuola secondaria di secondo grado;***

⇒ promuovere presso le scuole processi di ricerca-azione volti al rinnovamento delle metodologie didattiche e disciplinari in coerenza con le dinamiche di rinnovamento in atto nell'ordinamento;

⇒ delineare proposte operative per i percorsi di orientamento;

⇒ definire proposte operative in relazione ai processi di formazione iniziale, in ingresso e in servizio del personale docente, da realizzare in presenza e a distanza, sviluppando in particolare pratiche laboratoriali e di ricerca-azione;

⇒ promuovere la costituzione di gruppi di lavoro regionali con i quali raccordarsi per la definizione di strategie d'intervento locali;

⇒ definire e porre in essere, tramite i gruppi di lavoro regionali, azioni di monitoraggio delle esperienze realizzate con la valorizzazione e la diffusione delle migliori pratiche;

⇒ fornire alle istituzioni scolastiche indicazioni per la organizzazione, anche in rete, di attività da realizzare sul territorio, anche con gli apporti di rappresentanti della comunità matematica.

http://www.pubblica.istruzione.it/normativa/2007/allegati/dm74_07.pdf

ALLEGATO 7

Il commento della stampa il giorno 8 novembre 2007

Testata	Pagina	Articolo
il messaggero	13	SOMARI IN MATEMATICA, FIORONI NOMINA UN' EQUIPE
il messaggero	13	CHIERCHIA: "MOLTI PROF IMPREPARATI"
avvenire	12	DEBITI IN MATEMATICA FIORONI: E' EMERGENZA
giorno/resto/nazione	16/17	MATEMATICA BESTIA NERA, CERCASI CURA PER IGNORANTI
il giornale	20	TROPPI ASINI IN MATEMATICA BOCCIATI META' DEGLI STUDENTI
il giornale	20	IL SUDOKU? PER ME E' BANALE
il giornale	20	E INTANTO PRODI NON DA' L'ESEMPIO
il tempo	8	L'IRA DEI DOCENTI:"DATECI I SOLDI"
il tirreno	1	I NOSTRI STUDENTI ASINI IN MATEMATICA
il tirreno	13	LA MATEMATICA, QUESTA SCONOSCIUTA
il tirreno	13	FAR CAPIRE I NUMERI COME LA MUSICA: ECCO COME CATTURARE L'IMMAGINAZIONE
il tempo	8	GLI STUDENTI SOMARI? E' COLPA DELLA DIDATTICA
corriere delle alpi	5	MATEMATICA, E' ALLARME ROSSO
liberta'	4	PICCO D'IGNORANZA IN MATEMATICA: IL MINISTRO CORRE AI RIPARI
trentino	5	MATEMATICA, E' ALLARME ROSSO
corriere nazionale	4	E' ALLARME PER L'IGNORANZA IN MATEMATICA
alto adige	5	MATEMATICA, E' ALLARME ROSSO
la discussione	7	ASINI IN MATEMATICA 4 STUDENTI SU 10
gazzetta di parma	2	ALLARMA MATEMATICA: FIORONI CHIEDE AIUTO

http://www.invalsi.it/ric-int/Pisa2006/sito/docs/Quadro_riferimento_PISA2006.pdf

Figura 3.9 ■ Diagramma dei raggruppamenti di competenze