

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA**Tema di:** MATEMATICA*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.*

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) e^{-x}$$

dove n è un intero positivo e $x \in \mathbb{R}$

1. Si verifichi che la derivata di $f(x)$ è: $f'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}$
2. Si dica se la funzione f ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando n è dispari, $f(x) \leq 1$ per ogni x reale.
3. Si studi la funzione g ottenuta da f quando $n = 2$ e se ne disegni il grafico.
4. Si calcoli $\int_0^2 g(x) dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica.

PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy , si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + kx$, con k parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo o nullo).
2. Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta d'equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.
3. Sia \mathbf{D} la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g . Si calcoli l'area di \mathbf{D} .
4. La regione \mathbf{D} è la base di un solido \mathbf{W} le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di \mathbf{W} .

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

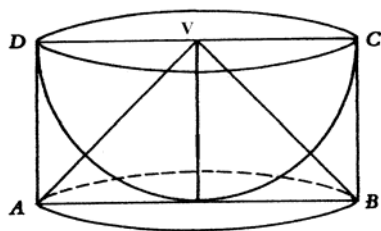
QUESTIONARIO

1. Siano: $0 < a < b$ e $x \in [-b, b]$. Si provi che: $\int_{-b}^b |x-a| dx = a^2 + b^2$.
2. Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili *funzioni* (o *applicazioni*) di A in B , ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?
3. Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati)
4. “Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni”. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \frac{0}{0}; \frac{1}{0}; 0^0$$

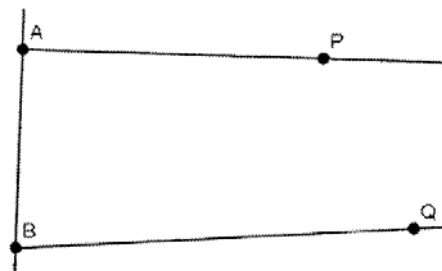
A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6. Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $\sin x = 0$, con punto iniziale $x_0 = 3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?
7. Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$
8. Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?
9. Nei “Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze”, Galileo Galilei descrive la



costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.

10. “Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta AB e gli angoli $\hat{P}AB$ e $\hat{Q}BA$ hanno somma minore di 180° , allora le semirette AP e BQ , prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q , si devono intersecare”. Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.



Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.