

**M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

*Il candidato risolve uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

**PROBLEMA 1**

Un filo metallico di lunghezza  $\lambda$  viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

**PROBLEMA 2**

Si considerino le funzioni  $f$  e  $g$  determinate da  $f(x) = \log x$  e  $g(x) = ax^2$ , essendo  $a$  un parametro reale e il logaritmo in base  $e$ .

1. Si discuta, al variare di  $a$ , l'equazione  $\log x = ax^2$  e si dica, in particolare, per quale valore di  $a$  i grafici di  $f$  e  $g$  sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto  $a = 1$ , l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni  $f$  e  $g$  e dalle rette  $x = 1$  e  $x = 2$ .
3. Si studi la funzione  $h(x) = \log x - ax^2$  scegliendo per  $a$  un valore numerico maggiore di  $\frac{1}{2e}$  e se ne disegni il grafico.

**M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

## CORSO DI ORDINAMENTO

## Tema di: MATEMATICA

*QUESTIONARIO*

- Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64<sup>a</sup> casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.
- I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
- Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di  $50 \text{ cm}^2$ , margini superiore e inferiore di  $4 \text{ cm}$  e margini laterali di  $2 \text{ cm}$ . Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?
- La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?
- Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di  $(a+b)^n$  è uguale a  $2^n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .
- L'equazione risolvente un dato problema è:  $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$  dove  $k$  è un parametro reale e  $x$  ha le seguenti limitazioni:  $15^\circ < x < 45^\circ$ . Si discuta per quali valori di  $k$  le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.
- La funzione  $f(x) = x^3 - 2x^2$  soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo  $[0,1]$ ? Se sì, trova il punto  $\xi$  che compare nella formula
 
$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$
- La funzione  $f(x) = \operatorname{tg} x$  assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo  $I = \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \right]$ , eppure non esiste alcun  $x \in I$  tale che  $f(x) = 0$ . È così? Perché?
- Della funzione  $f(x)$  si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che:  $f'(x) = f(x)$  e  $f(0) = 1$ . Puoi determinare  $f(x)$ ?
- La funzione  $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \operatorname{cos} x$  ha un estremo relativo per  $x = \frac{4\pi}{3}$  ed è  $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$ .  
Si trovino  $a$  e  $b$  e si dica quale è il periodo di  $f(x)$ .

---

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

**Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

*Il candidato risolve uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

**PROBLEMA 1**

Un filo metallico di lunghezza  $\lambda$  viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

**PROBLEMA 2**

Si considerino le funzioni  $f$  e  $g$  determinate da  $f(x) = \log x$  e  $g(x) = ax^2$ , essendo  $a$  un parametro reale e il logaritmo in base  $e$ .

1. Si discuta, al variare di  $a$ , l'equazione  $\log x = ax^2$  e si dica, in particolare, per quale valore di  $a$  i grafici di  $f$  e  $g$  sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto  $a = -e^2$ , l'area che è compresa fra i grafici di  $f$  e  $g$  (con  $x > 0$ ) nella striscia di piano determinata dalle rette d'equazioni  $y = -1$  e  $y = -2$ .
3. Si studi la funzione  $h(x) = \log x - ax^2$  scegliendo per  $a$  un valore numerico maggiore di  $\frac{1}{2e}$  e se ne disegni il grafico.

**Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

**QUESTIONARIO**

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64<sup>a</sup> casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.
2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
3. In un piano sono dati una retta  $r$  e due punti  $A$  e  $B$  ad essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine  $r$ . Si trovi il più breve cammino che congiunga  $A$  con  $B$  toccando  $r$ .
4. Si dimostri che l'equazione  $\sin x = x - 1$  ha una e una sola radice  $\alpha$  e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare  $\alpha$  con la precisione voluta.
5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di  $(a + b)^n$  è uguale a  $2^n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .
6. L'equazione risolvente un dato problema è:  $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$  dove  $k$  è un parametro reale e  $x$  ha le seguenti limitazioni:  $15^\circ < x < 45^\circ$ . Si discuta per quali valori di  $k$  le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.
7. *Bruno de Finetti* (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: “*che cos'è la probabilità?*” era solito rispondere: “*la probabilità non esiste!*”. Quale significato puoi attribuire a tale risposta? E' possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?
8. Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità  $\geq 0,99$  di colpirlo almeno una volta?
9. Della funzione  $f(x)$  si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che:  $f'(x) = f(x)$  e  $f(0) = 1$ . Puoi determinare  $f(x)$ ?
10. Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

calcola un'approssimazione di  $\pi$  utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

---

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.