ESAME DI STATO DI ISTITUTO TECNICO INDUSTRIALE – 1977 – 1^ Sessione

Indirizzo: Meccanica

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: meccanica applicata alle macchine e macchine a fluido

Una coppia di ruote cilindriche a denti diritti deve consentire la trasmissione del moto fra due alberi paralleli.

La ruota motrice è montata a sbalzo ad una distanza media dai due supporti rispettivamente di 100 mm e di 450 mm; la ruota condotta risulta invece calettata fra i due supporti, ciascuno distante da essa rispettivamente 200 mm e 80 mm.

Le ruote hanno le seguenti caratteristiche:

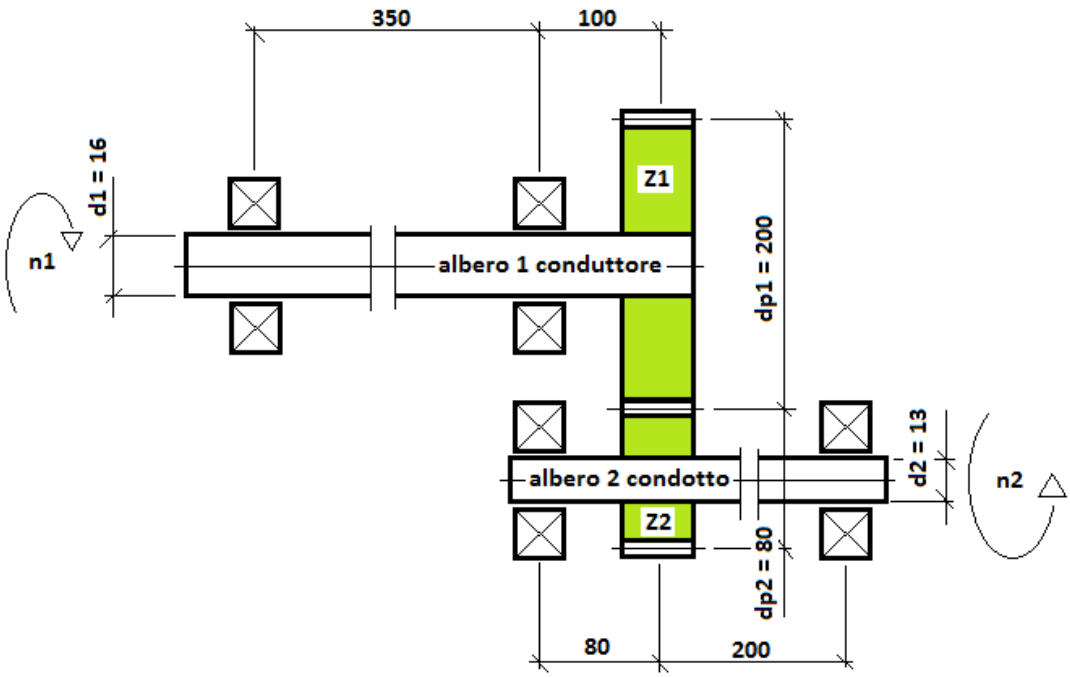
- numero denti ruota motrice $z_1 = 50$;
- numero denti ruota condotta $z_2 = 20$;
- modulo m = 4 mm;
- angolo di pressione $\alpha = 20°$.

Sapendo che l'albero motore (1) trasmette dall'albero utilizzatore (2) la potenza P = 4 CV alla velocità di rotazione $n_1 = 800$ g/min, calcolare:

- le reazioni sugli appoggi dei due alberi;
- la tensione unitaria di flessione sui denti degli ingranaggi;
- la sollecitazione unitaria massima di flesso-torsione degli alberi, noti i diametri $d_1 = 16$ mm e $d_2 = 13$ mm;
- il tempo impiegato dalla trasmissione a passare dalla velocità di regime ($n_1 = 800$ g/min) alla velocità $n_2 = 1000$ g/min dell'albero (1), conoscendo i valori dei momenti di inerzia di massa dei due alberi: $J_1 = 0{,}10$ kg.m.s^2 $J_2 = 0{,}07$ kg.m.s^2

Il candidato supponga in quest'ultimo caso che, durante il passaggio da una velocità all'altra, la potenza trasmessa rimanga costante.

SCHEMA DELL' INGRANAGGIO



Svolgimento :

Come primo approccio, determiniamo i diametri primitivi della ruota motirce Dp_1 e della ruota condotta Dp_2, ovverosia :

$Dp_1 = m \cdot z_1 = 4 \cdot 50 = 200$ mm ;

$Dp_2 = m \cdot z_2 = 4 \cdot 20 = 80$ mm .

Il rapporto di trasmissione di moltiplicazione risulta essere :

$i = z_2 / z_1 = 20 / 50 = 0{,}4$;

per cui, possiamo anche determinare :

$n_2 = n_1 / i = 800 / 0{,}4 = 2000$ g/min .

Le frequenze di rotazione dei due alberi corrispondono a :

$\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot n_1 / 60 = 2 \cdot \pi \cdot 800 / 60 = 83{,}77$ rad/s ;

$\omega_2 = 2 \cdot \pi \cdot n_2 / 60 = 2 \cdot \pi \cdot 2000 / 60 = 209{,}4$ rad/s .

Determiniamo il momento torcente trasmesso dall' albero della ruota motrice e quello della ruota condotta, considerando il rendimento dell' ingranaggio :

$M1 = N / \omega_1 = 4 \cdot 0{,}736 \cdot 1000 / 83{,}77 = 35{,}14$ N · m ;

$M2 = M1 \cdot (z_2 / z_1) \cdot \eta$;

dove $\eta = 1 - \pi \cdot f \cdot (1/z_1 + 1/z_2) \cdot K$;

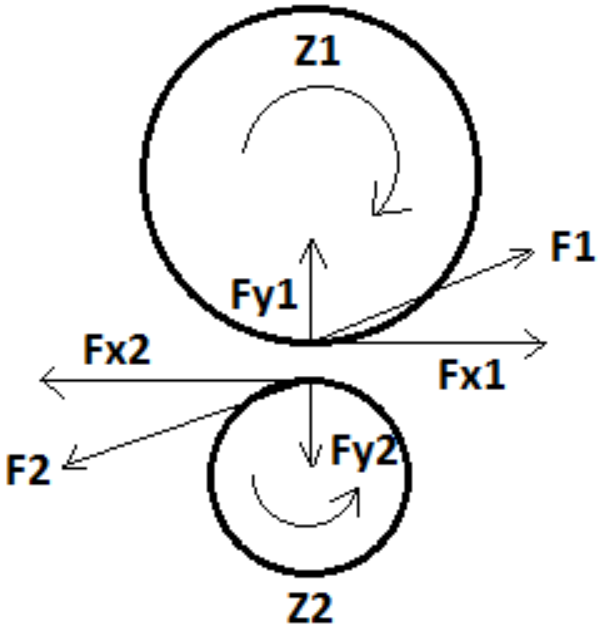
per il coefficiente d' attrito f e per il coefficiente K si assumono i valori prudenziali : f = 0,10 e K = 1 .

Per cui, sostituendo i termini noti, otterremo un rendimento pari a :

$\eta = 1 - \pi \cdot 0{,}10 \cdot (1/50 + 1/20) \cdot 1 = 0{,}978$.

Infine, M2 risulta : $M2 = 35{,}14 \cdot (20/50) \cdot 0{,}978 = 13{,}75\ N \cdot m$.

Ora, determiniamo le forze agenti e trasmesse dall' ingranaggio :



la forza tangenziale in corrispondenza del diametro primitivo :

$Fx_1 = M_1 \cdot 2 / Dp_1 = 35{,}14 \cdot 2 \cdot 1000 / 200 = 351{,}4\ N$;

$- Fx_2 = Fx_1 \cdot \eta = 351{,}4 \cdot 0{,}978 = - 343{,}7\ N$;

la forza nella direzione radiale :

$Fy_1 = Fx_1 \cdot tg\ \alpha = 351{,}4 \cdot tg\ 20° = 127{,}9\ N$;

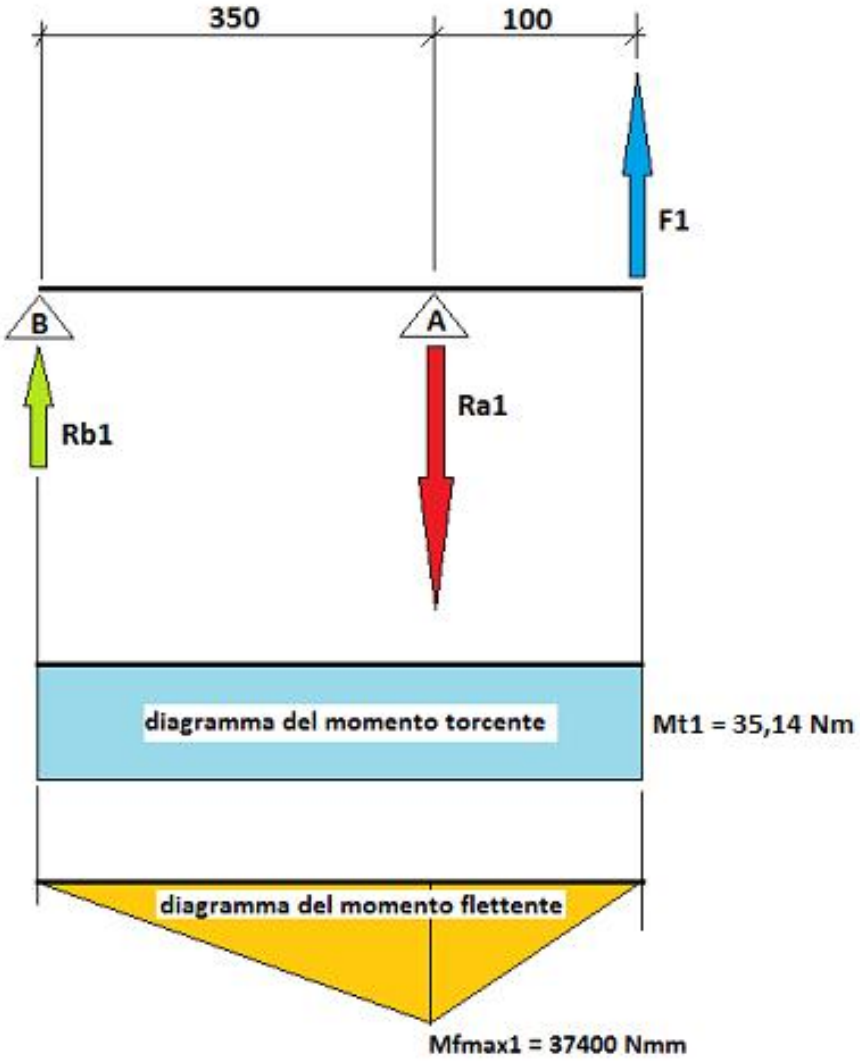
$- Fy_2 = - Fx_2 \cdot tg\ \alpha = - 343{,}7 \cdot tg\ 20° = - 125\ N$;

la forza nella direzione della retta d' azione :

$F_1 = Fx_1 / \cos \alpha = 351{,}4 / \cos 20° = 374\ N$;

$- F_2 = - Fx_2 / \cos \alpha = - 343{,}7 / \cos 20° = - 365{,}7\ N$.

Calcoliamo le reazioni vincolari Ra_1 e Rb_1 sull' albero motore 1, mediante le equazioni di equilibrio. Sotto, riportiamo lo schema di carico e i relativi diagrammi di carico .



Reazione dei sopporti A e B :

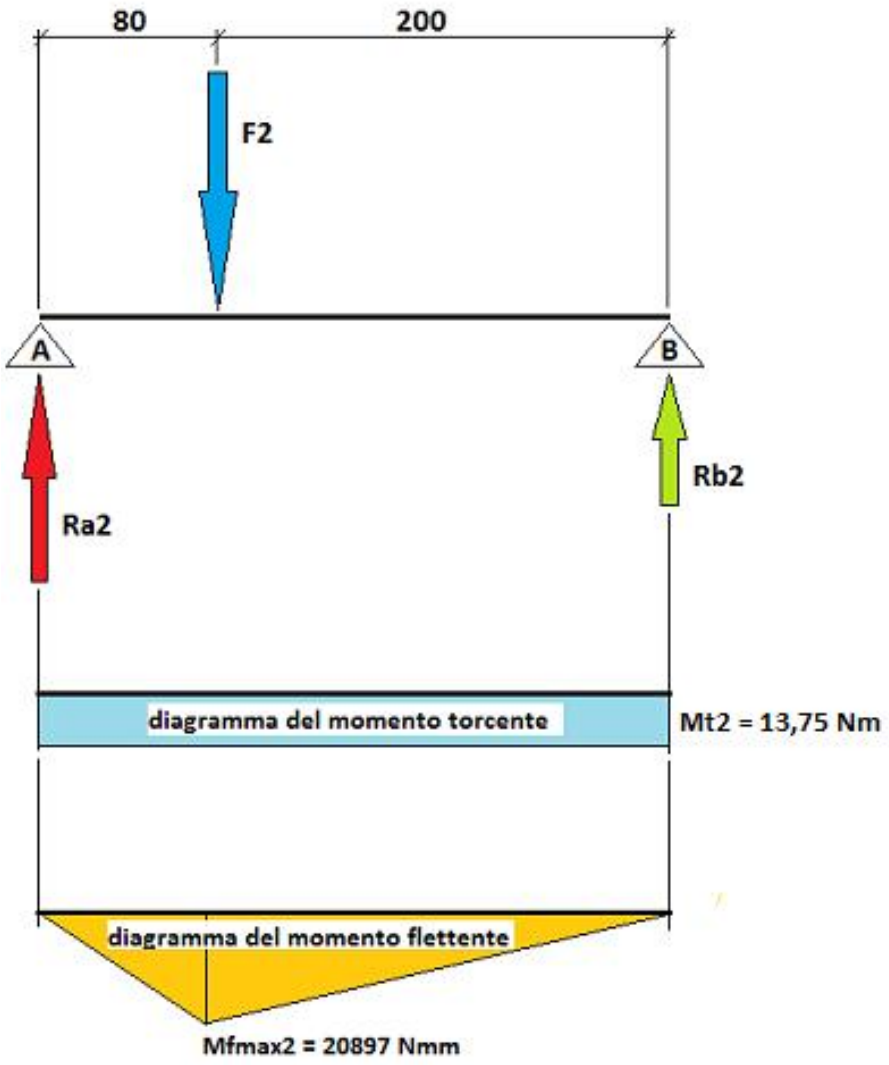
$Ra_1 = F_1 \cdot 450 / 350 = 374 \cdot 450 / 350 = 480,8$ N ;

$Rb_1 = Ra_1 - F_1 = 480,8 - 374 = 106,8$ N .

Calcolo del momento flettente massimo in corrispondenza del sopporto A :

$Mfmax1 = Rb_1 \cdot 350 = 106,8 \cdot 350 = 37380$ Nm $\rightarrow$ 37400 Nm .

Calcoliamo le reazioni vincolari Ra_2 e Rb_2 sull' albero condotto 2, mediante le equazioni di equilibrio. Sotto, riportiamo lo schema di carico e i relativi diagrammi di carico .



Reazione dei sopporti A e B :

$Ra_2 = |- F_2| \cdot 200 / 280 = | - 365,7 | \cdot 200 / 280 = 261,2$ N ;

$Rb_2 = |- F_2| - Ra_2 = | - 365,7 | - 261,2 = 104,5$ N .

Calcolo del momento flettente massimo in corrispondenza della retta d' azione della forza F2 :

$Mfmax2 = Ra_2 \cdot 80 = 261,2 \cdot 80 = 20897$ Nm $\rightarrow$ 20900 Nm .

Ora, eseguiremo il calcolo della tensione unitaria di flessione alla base dei denti dell' ingranaggio, equazione che si basa sul metodo di Lewis e Reuleaux :

$Ft = \sigma \cdot m \cdot b \cdot Y \cdot \eta d$;

da cui si ricava :

$\sigma = Ft / m \cdot b \cdot Y \cdot \eta d$.

Calcolo della sollecitazione massima alla base del dente della ruota motrice z1 :

$\sigma_1 = Fx_1 \ / \ m \cdot b \cdot Y \cdot \eta d$;

in cui :

Fx_1 = forza tangenziale, calcolata al punto precedente, corrisponde a : 351,4 N ;

m = modulo : 4 mm ;

b = lunghezza assiale del dente; per lo spessore della ruota b, faremo riferimento al coefficiente ʎ, dove : ʎ = b/m ; per una costruzione poco rigida con alberi a sbalzo ʎ = 10-15, adotteremo il valore minimo pari a 10.

Per cui abbiamo : b = ʎ · m = 10 · 4 = 40 mm ;

Y = fattore di forma Y ; per l' angolo di pressione β di 20° si ricava attraverso la seguente equazione:

$Y = 0,48 - 2,87 / Z_1 = 0,48 - 2,87 / 50 = 0,4226$;

ηd = coefficiente di velocità, il quale si ricava mediante la seguente relazione :

$\eta d = 3 / (3 + Vp)$;

la velocità periferica dell' ingranaggio corrisponde a:

$Vp = \omega 1 \cdot r1 = 83,77 \cdot 0,100 = 8,377$ m/s ,

e, in base a questo ultimo dato, possiamo determinare il valore del coefficiente dinamico :

$\eta d = 3 / (3 + 8,377) = 0,264$;

con tutti i valori numerici a disposizione possiamo calcolare la tensione unitaria, ovverosia :

$\sigma_1 = 351,4 / 4 \cdot 40 \cdot 0,4226 \cdot 0,264 = 19,68$ N/mm^2 .

Calcolo della sollecitazione massima alla base del dente della ruota condotta z2 :

$\sigma_2 = |- Fx_2| \ / \ m \cdot b \cdot Y \cdot \eta d$;

in cui :

- Fx_2 = forza tangenziale, calcolata al punto precedente, corrisponde a : - 343,6 N ;

m = modulo : 4 mm ;

b = lunghezza assiale del dente, come per la ruota motrice z1, corrisponde a : 40 mm ;

Y = fattore di forma Y ; per l' angolo di pressione β di 20° si ricava attraverso la seguente equazione:

$Y = 0,48 - 2,87 / Z_2 = 0,48 - 2,87 / 20 = 0,3365$;

ηd = coefficiente di velocità, come per la ruota motrice z1, corrisponde a : 0,264 ;

con tutti i valori numerici a disposizione possiamo calcolare la tensione unitaria, ovverosia :

$\sigma_2 = | -343,7 | / 4 \cdot 40 \cdot 0,3365 \cdot 0,264 = 24,18$ N/mm^2 .

Da come si evince, la ruota condotta Z2, essendo più piccola, risulta maggiormente sollecitata della ruota Z1 .

La tensione unitaria massima di flesso-torsione (sollecitazione composta) dell' albero 1 conduttore si calcola con la seguente equazione :

$\sigma_1 = 32 \cdot Mfid_1 / \pi \cdot d_1^3$;

dapprima, determiniamo il momento flettente ideale della sezione del supporto A, maggiormente sollecitata, ovvero :

$$Mfid_1 = \sqrt{Mf_{max1}^2 + \tfrac{3}{4} \cdot Mt_1^2} \; ;$$

$$Mfid_1 = \sqrt{(37400)^2 + \tfrac{3}{4} \cdot (35140)^2} = 48217 \text{ Nmm} \; ;$$

per cui, sostituendo i termini noti nell' espressione precedente, abbiamo :

$\sigma_1 = 32 \cdot 48217 / \pi \cdot 16^3 = 120 \text{ N/mm}^2$.

La tensione unitaria massima di flesso-torsione (sollecitazione composta) dell' albero 2 condotto si calcola, come prima, con la seguente equazione :

$\sigma_2 = 32 \cdot Mfid_2 / \pi \cdot d_2^3$;

come per l' albero 1 , determiniamo il momento flettente ideale della sezione, in corrispondenza della retta d' azione della forza F2, maggiormente sollecitata, ovvero :

$$Mfid_2 = \sqrt{Mf_{max2}^2 + \tfrac{3}{4} \cdot Mt_2^2} \; ;$$

$$Mfid_2 = \sqrt{(20900)^2 + \tfrac{3}{4} \cdot (13750)^2} = 24054 \text{ Nmm} \; ;$$

per cui, sostituendo i termini noti nell' espressione precedente, abbiamo :

$\sigma_2 = 32 \cdot 24054 / \pi \cdot 13^3 = 111{,}5 \text{ N/mm}^2$.

Calcoliamo il tempo necessario dalla trasmissione a passare dalla velocità di regime n_1 = 800 g/min alla velocità n_2 = 1000 g/min dell' albero 1 conduttore .

Dapprima, convertiamo le unità dei momenti d' inerzia di massa secondo il SI , ovvero :

$J_1 = 0{,}10 \text{ Kgms}^2 = 0{,}10 \cdot 9{,}81 = 0{,}981 \text{ Kgm}^2$;

$J_2 = 0{,}07 \text{ Kgms}^2 = 0{,}07 \cdot 9{,}81 = 0{,}6867 \text{ Kgm}^2$.

Poi, determiniamo le velocità angolari, iniziali e finali, per i due alberi 1 e 2 :

ω_{i1} = 83,77 rad/s (già calcolata all' inizio del tema) ;

$\omega_{f1} = 2 \cdot \pi \cdot n_2 / 60 = 2 \cdot \pi \cdot 1000 / 60 = 104{,}7$ rad/s ;

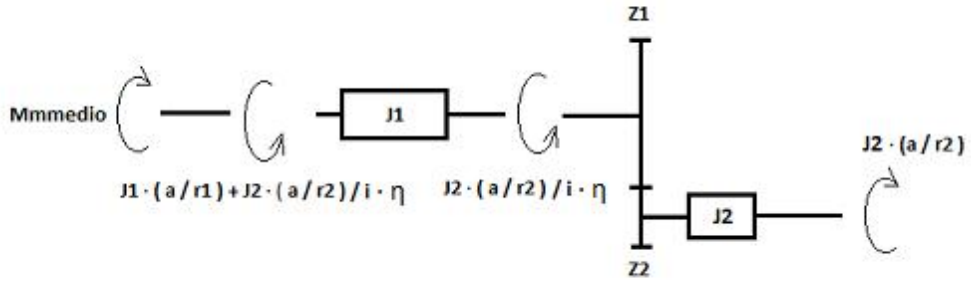
ω_{i2} = 209,4 rad/s (già calcolata all' inizio del tema) ;

$\omega_{f2} = \omega_{f1} / i = 104,7 / 0,4 = 261,8$ rad/s .

Il momento motore medio applicato all' ingresso dell' albero 1 , considerando la potenza costante, per passare da un regime di velocità ω_{i1} al regime ω_{f1} , corrisponde a :

$M_{mmedio} = N / \omega_{medio} = 2 \cdot N / (\omega_{i1} + \omega_{f1}) = 2 \cdot 4 \cdot 0,736 \cdot 1000 / (83,77 + 104,7) = 31,24$ Nm .

Questo momento motore medio, applicato all' ingresso dell' albero 1 (M_{mmedio}), deve vincere la somma algebrica dei due momenti d' inerzia di massa, applicati ai due alberi, considerando per la seconda massa, non essendo coassiale all' albero 1, il rapporto e il rendimento dell' ingranaggio :



ovverosia :

$M_{mmedio} = J_1 \cdot (a / r_1) + J_2 \cdot (a / r_2) / i \cdot \eta$;

dove :

(a / r_1) = accelerazione angolare della massa J_1 ;

(a / r_2) = accelerazione angolare della massa J_2 ;

oltretutto, l' accelarazione angolare può anche essere scritta in questa forma :

$(a / r_1) = (\omega_{f1} - \omega_{i1}) / t$;

$(a / r_2) = (\omega_{f2} - \omega_{i2}) / t$;

sostituendo queste ultime due equazioni in quella del momento motore medio, avremo :

$M_{mmedio} = J_1 \cdot (\omega_{f1} - \omega_{i1}) / t + J_2 \cdot (\omega_{f2} - \omega_{i2}) / t \cdot i \cdot \eta$;

sviluppando ulteriormente l' equazione, raccogliendo il denominatore comune t , otteniamo :

$M_{mmedio} = 1 / t \cdot [J_1 \cdot (\omega_{f1} - \omega_{i1}) + J_2 \cdot (\omega_{f2} - \omega_{i2}) / i \cdot \eta]$;

ora, risolviamo l' equazione rispetto l' unica incognita (t) :

$t = 1 / M_{mmedio} \cdot [J_1 \cdot (\omega_{f1} - \omega_{i1}) + J_2 \cdot (\omega_{f2} - \omega_{i2}) / i \cdot \eta]$;

sostituendo i termini letterali con i valori numerici noti, abbiamo :

$t = 1 / 31,24 \cdot [0,981 \cdot (104,7 - 83,77) + 0,6867 \cdot (261,8 - 209,4) / 0,4 \cdot 0,978]$;

$t = 0,032 \cdot [0,981 \cdot 20,93 + 0,6867 \cdot 52,4 / 0,3912]$;

$t = 0,032 \cdot [20,53 + 91,98]$;

$t = 0{,}032 \cdot 112{,}5 = 3{,}6$ s .

Nella progettazione delle macchine automatiche non viene mai presa in cosiderazione la potenza assorbita dal motore elettrico nella fase di accelerazione , semmai, viene presa come riferimento la coppia max allo spunto dell' attuatore elettrico. Quindi, solitamente si cerca di ridurre il più possibile, compatibilmente con le caratteristiche del motore, il tempo per portare a regime il motore dalla condizione, generalmente, di regime nullo ω_0 alla situazione di regime massimo ω_{max} , ad esempio nella frazione di qualche decimo di secondo , e, in base al tempo previsto, si determina l' accelerazione angolare per, poi, definire la coppia massima allo spunto; di certo, la potenza media assorbita, nella fase di avviamento, non è un dato tecnico di rilevante interesse ai fini del progetto di una trasmissione per automazione.

Autore: Guarda Luca, progettista meccanico presso SAVIO MACCHINE TESSILI SPA di Pordenone; (indirizzo mail : l.guarda@libero.it) .